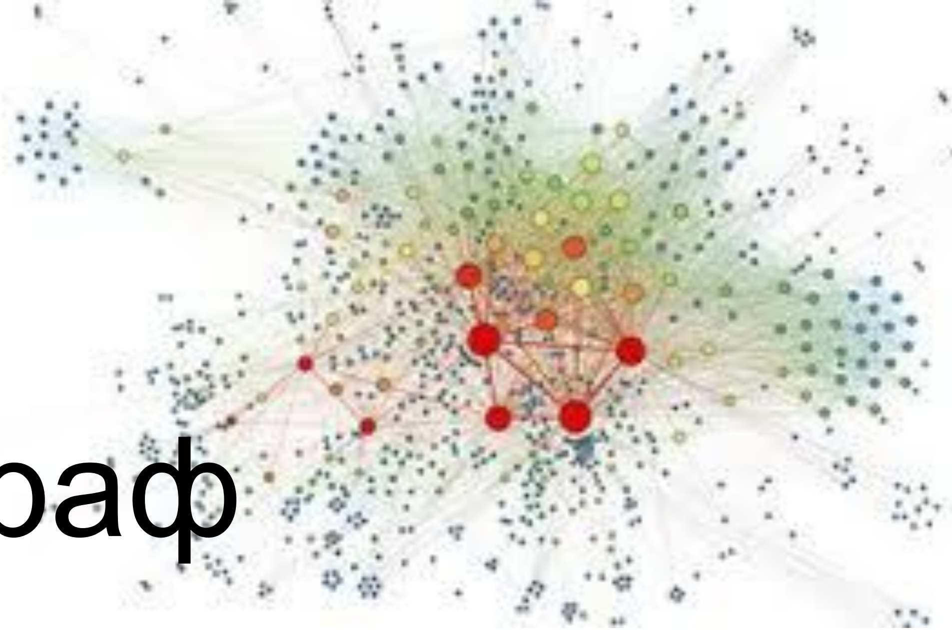
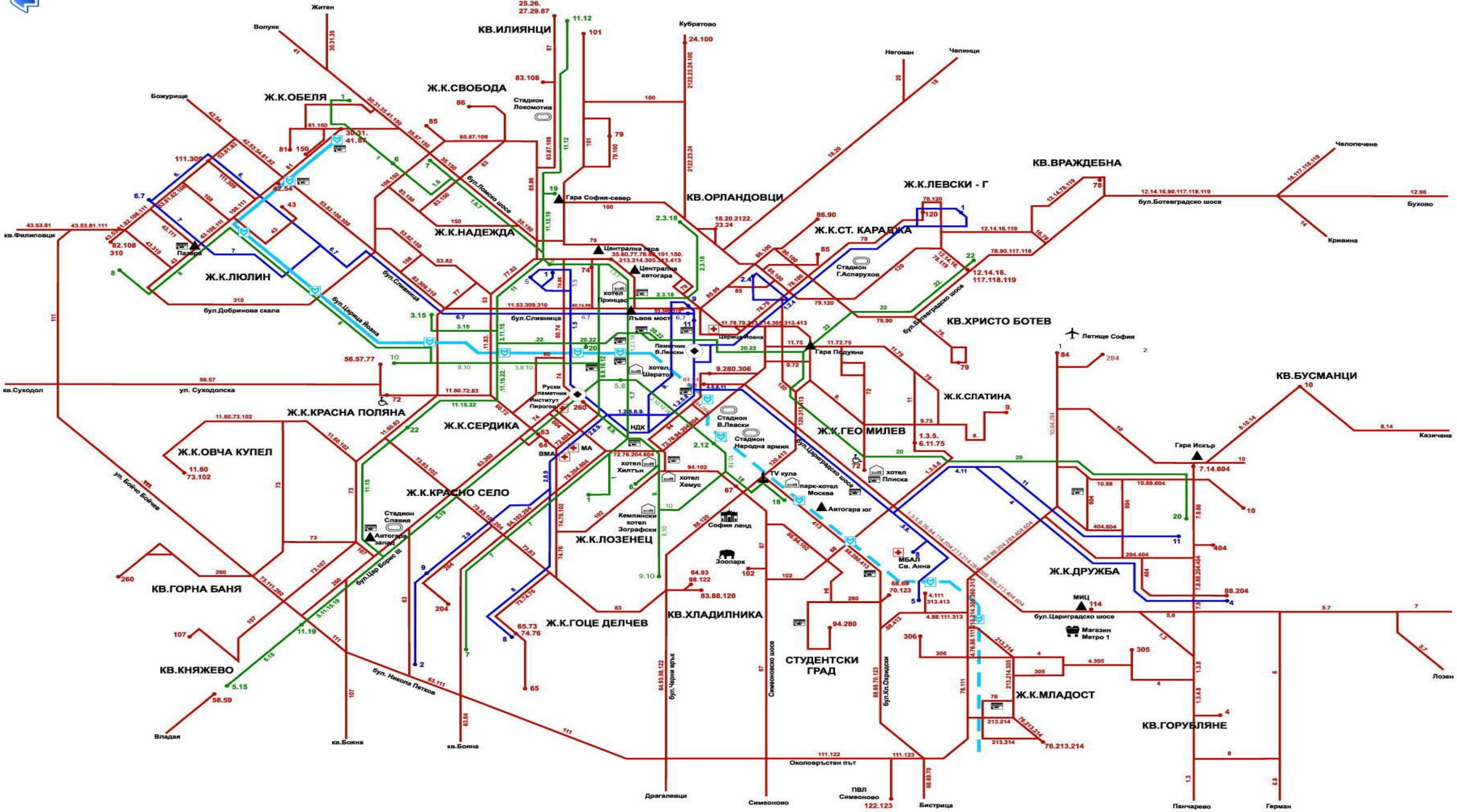


# Граф

Лекция 10 по СДА, Софтуерно Инженерство
Зимен семестър 2018-2019г
д-р Милен Чечев

# Защо изучаваме алгоритми за графи?

- Хиляди практически проблеми, които се решават с тях!
- Един от най-интересните и предизвикателни раздели от компютърните науки и дискретната математика.



Житен
Волуяк
КВ.ИЛИЯНЦИ
Кубратово
Негован
Чепинци
Божурище
Ж.К.ОБЕЛЯ
Ж.К.СВОБОДА
Стадион Локомотив
Челопечене
КВ.ВРАЖДЕБНА
Ж.К.ЛЕВСКИ - Г
КВ.ОРЛАНДОВЦИ
Гара София-север
бул.Ботевградско шосе
Бухово
Кривина
кв.Филиповци
Ж.К.НАДЕЖДА
бул.Ломско шосе
Ж.К.СТ. КАРАДЖА
Централна гара
Централна автогара
Стадион Г.Аспарухов
Пазар
Ж.К.ЛЮЛИН
бул.Сливница
бул.Царица Йоана
бул.Добринова скала
хотел Принцес
Лъвов мост
Царица Йоана
КВ.ХРИСТО БОТЕВ
Летище София
Паметник В.Левски
Гара Подуяне
хотел Шератон
КВ.БУСМАНЦИ
кв.Суходол
ул. Суходолска
Ж.К.КРАСНА ПОЛЯНА
Руски паметник
Институт Пирогов
НДК
Ж.К.СЛАТИНА
Ж.К.СЕРДИКА
Стадион В.Левски
Стадион Народна армия
Ж.К.ГЕО МИЛЕВ
Казичене
Ж.К.ОВЧА КУПЕЛ
ВМА
МА
хотел Хилтън
бул.Цариградско шосе
TV кула
хотел Плиска
Гара Искър
хотел Хемус
парк-хотел Москва
ул. Бойчо Бойчев
Ж.К.КРАСНО СЕЛО
Автогара юг
Стадион Славия
Автогара запад
Кемпински хотел Зографски
София ленд
Ж.К.ЛОЗЕНЕЦ
бул.Цар Борис III
Зоопарк
МБАЛ Св. Анна
Ж.К.ДРУЖБА
КВ.ГОРНА БАНЯ
МИЦ
бул.Цариградско шосе
Магазин Метро 1
Ж.К.ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ
КВ.ХЛАДИЛНИКА
СТУДЕНТСКИ ГРАД
КВ.КНЯЖЕВО
бул. Никола Петков
Ж.К.МЛАДОСТ
Лозен
бул.Черни връх
Симеоновско шосе
бул.Кл.Охридски
КВ.ГОРУБЛЯНЕ
Владая
кв.Бояна
кв.Бояна
Околовръстен път
Драгалевци
Симеоново
ПВЛ Симеоново
Бистрица
Панчарево
Герман

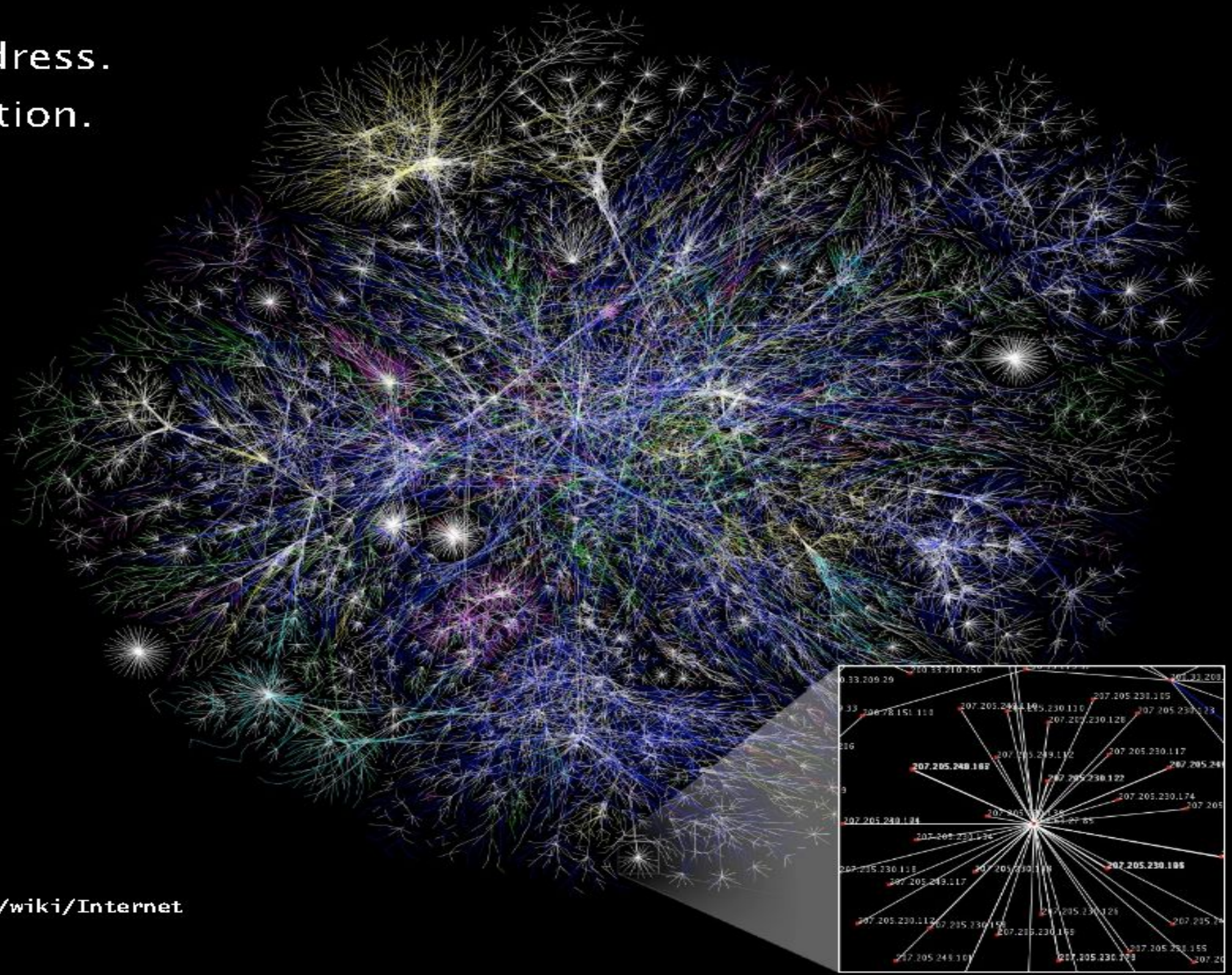
HADJI DIMITUR
KNYAGINYA MARIYA LOUISA Blvd
Central Railroad Station
SLIVNITSA Blvd
Luvov most Sq.
KONSTANTIN STOILOV Blvd
GEN. DANAIL NIKOLAEV Blvd
GENERAL VLADIMIR VAZOV Blvd
SOUHATA REKA
PODOUYANE
BOTEVGRADSKO SHOSSE Blvd
PODOUYANE Railroad Station
HRISTO BOTEV Blvd
STEFAN STAMBOULOV Blvd
KNYAZ AL. DONDOUKOV Blvd
VASSIL LEVSKI Blvd
YANKO SAKUZOV Blvd
MADRID Blvd
EVLOGI GEORGIEV Blvd
AL. STAMBOLIYSKI Blvd
SUBORNA
Sveta Nedelya Sq.
Al. Battenberg Sq.
TSAR OSVOBODITEL Blvd
Aleksandur Nevski Sq.
Vassil Levski Sq.
Narodno Subranie Sq.
SITNYAKOVO
DAMYAN GRUEV Blvd
SKOBELEV Blvd
Makedoniya Sq.
MAKEDONIYA Blvd
VITOSHA Blvd
G. S. RAKOVSKI
Orlov most Sq.
Ruski pametnik Sq.
GEN. SKOBELEV Blvd
PATRIARCH EVTIMI Blvd
Stadium "Vassil Levski"
TSARIGRADSKO SHOSSE Blvd
SHIPCHENSKI PROHOD Blvd
BORISSOVA GRADINA
PENCHO SLAVEYKOV Blvd
PRAGA Blvd
DRAGAN TSANKOV Blvd
PEYU YAVOROV Blvd
GEO MILEV
National Palace of Culture
BABA NEDELYA Blvd
BULGARIA Blvd
HRISTO SMIRNENSKI
Airport


SOCIAL
NETWORK

# The Internet as mapped by the Opte Project

Vertex = IP address.

Edge = connection.



http://en.wikipedia.org/wiki/Internet

# ...и още...

| graph | vertex | edge |
|---|---|---|
| **communication** | telephone, computer | fiber optic cable |
| **circuit** | gate, register, processor | wire |
| **mechanical** | joint | rod, beam, spring |
| **financial** | stock, currency | transactions |
| **transportation** | intersection | street |
| **internet** | class C network | connection |
| **game** | board position | legal move |
| **social relationship** | person | friendship |
| **neural network** | neuron | synapse |
| **protein network** | protein | protein-protein interaction |
| **molecule** | atom | bond |

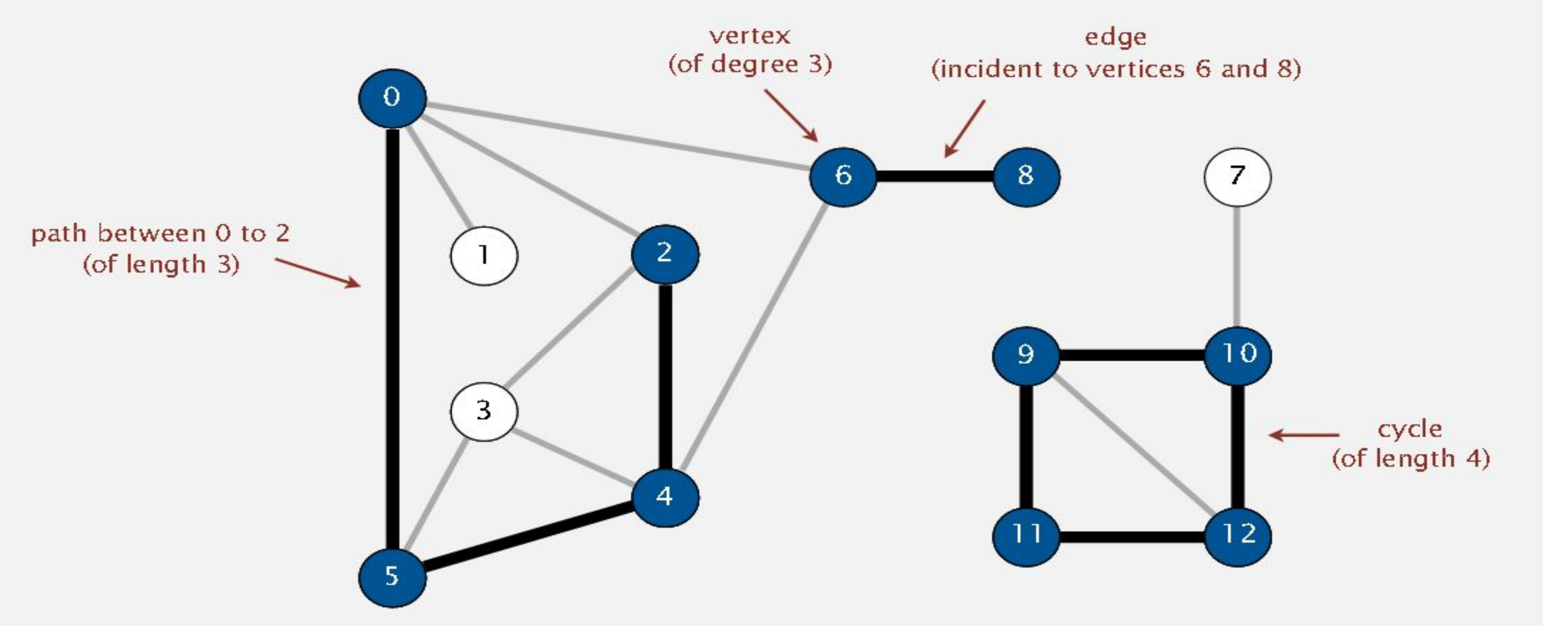
# Терминология

Граф: множество от върхове свързани с ребра

Път в граф: Последователност от върхове в граф, свързани с ребро, без да се повтаря ребро.

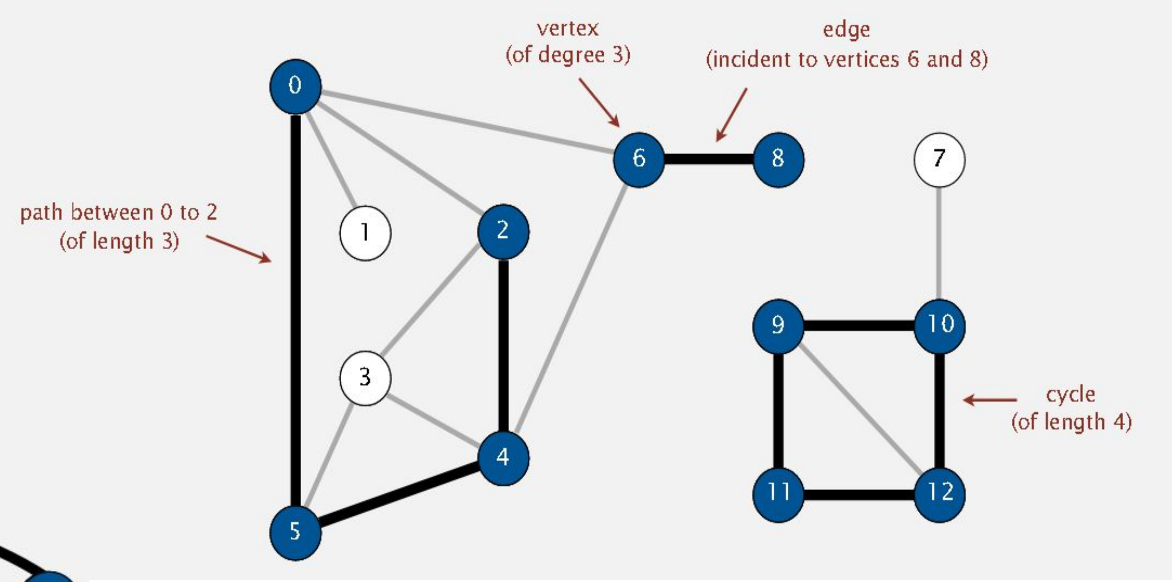
Свързаност: Два върха са свързани ако съществува път между тях

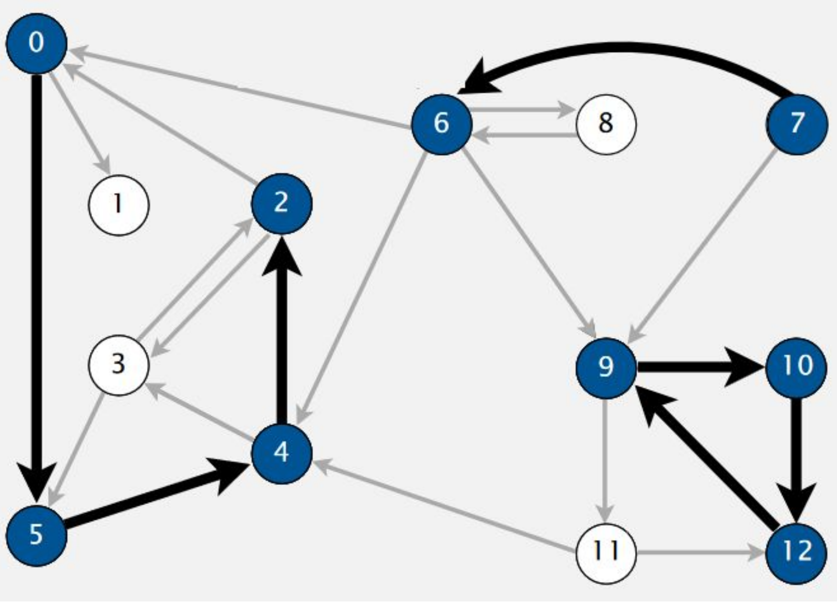
Цикъл - път с дължина повече от 1, който започва и свършва с един и същи възел



# Видове граф

- Ненасочен(undirected)
- Насочен(directed)

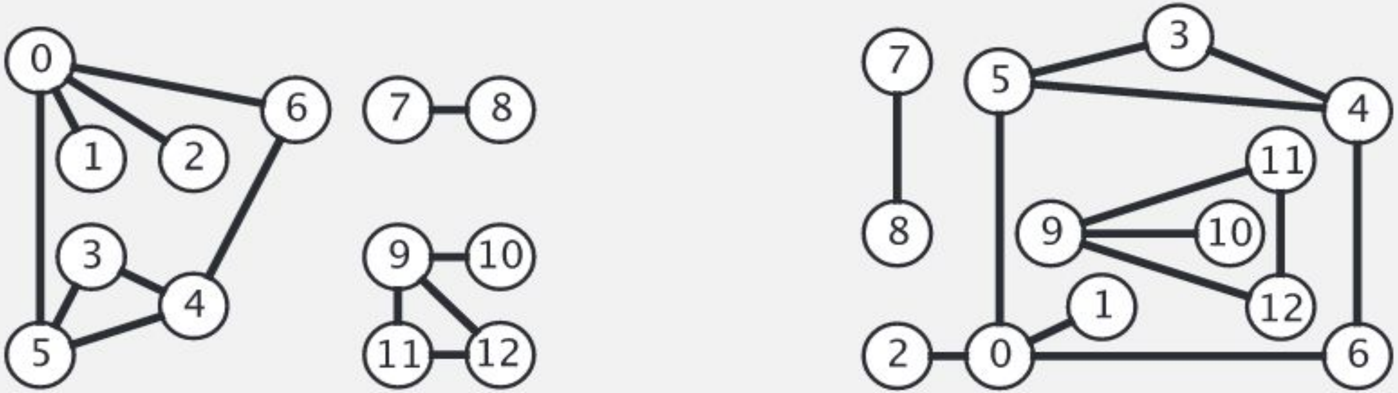


| problem | description |
|---|---|
| **s-t path** | *Is there a path between s and t ?* |
| **shortest s-t path** | *What is the shortest path between s and t ?* |
| **cycle** | *Is there a cycle in the graph ?* |
| **Euler cycle** | *Is there a cycle that uses each edge exactly once ?* |
| **Hamilton cycle** | *Is there a cycle that uses each vertex exactly once ?* |
| **connectivity** | *Is there a path between every pair of vertices ?* |
| **biconnectivity** | *Is there a vertex whose removal disconnects the graph ?* |
| **planarity** | *Can the graph be drawn in the plane with no crossing edges ?* |
| **graph isomorphism** | *Are two graphs isomorphic?* |

# Graph representation

Graph drawing. Provides intuition about the structure of the graph.



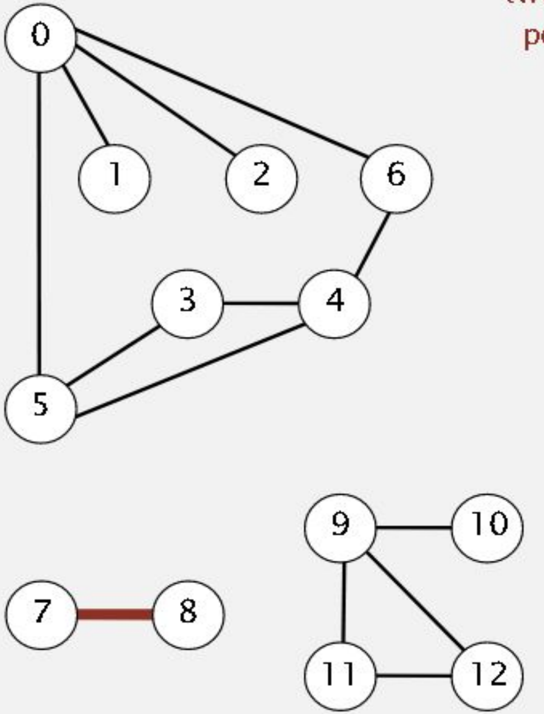

two drawings of the same graph

Caveat. Intuition can be misleading.

# Graph representation: adjacency matrix

Maintain a $V$-by-$V$ boolean array; for each edge $v–w$ in graph:

`adj[v][w] = adj[w][v] = true.`



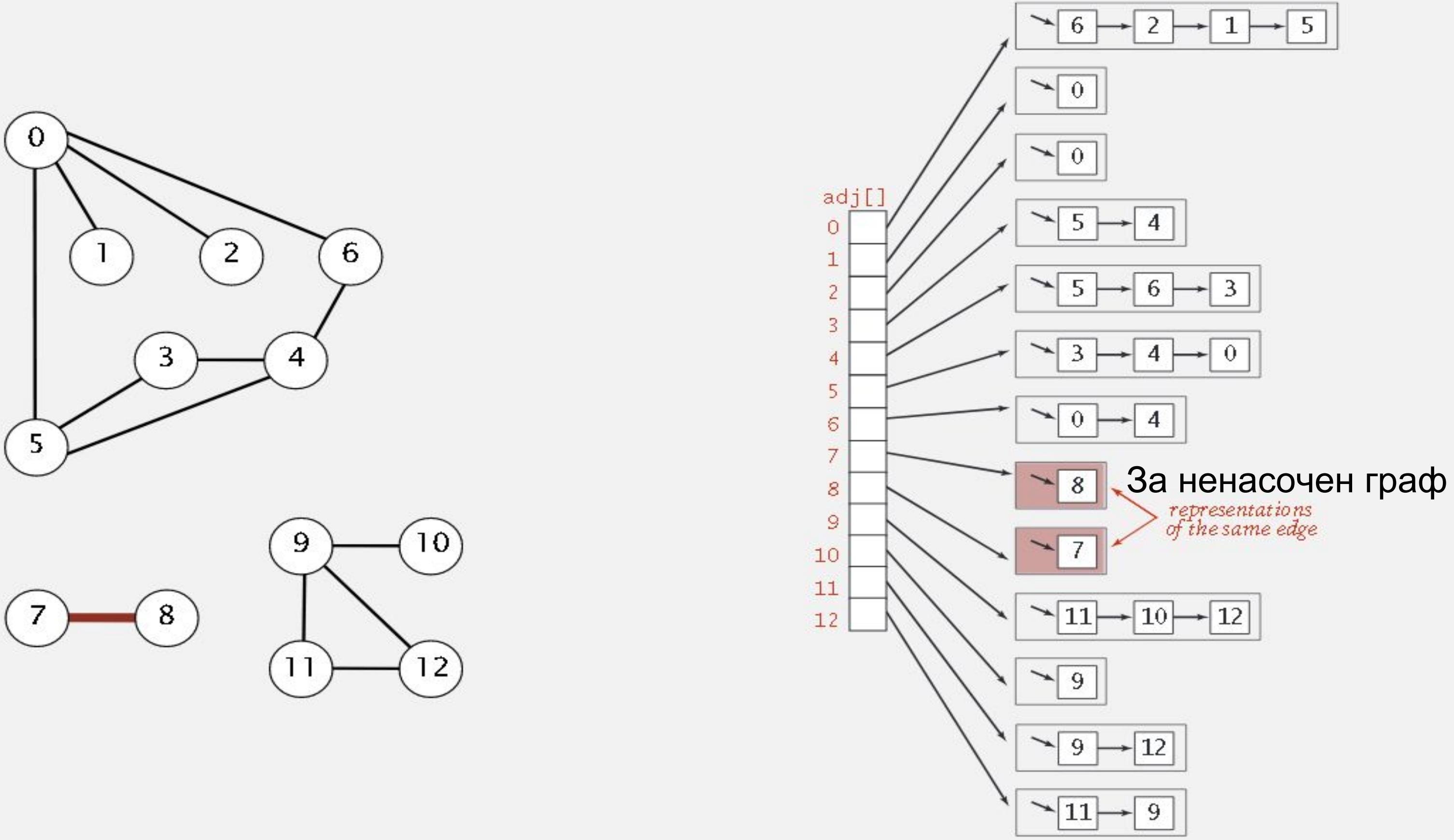

two entries per edge

(За ненасочен граф)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

# Graph representation: adjacency lists

Maintain vertex-indexed array of lists.



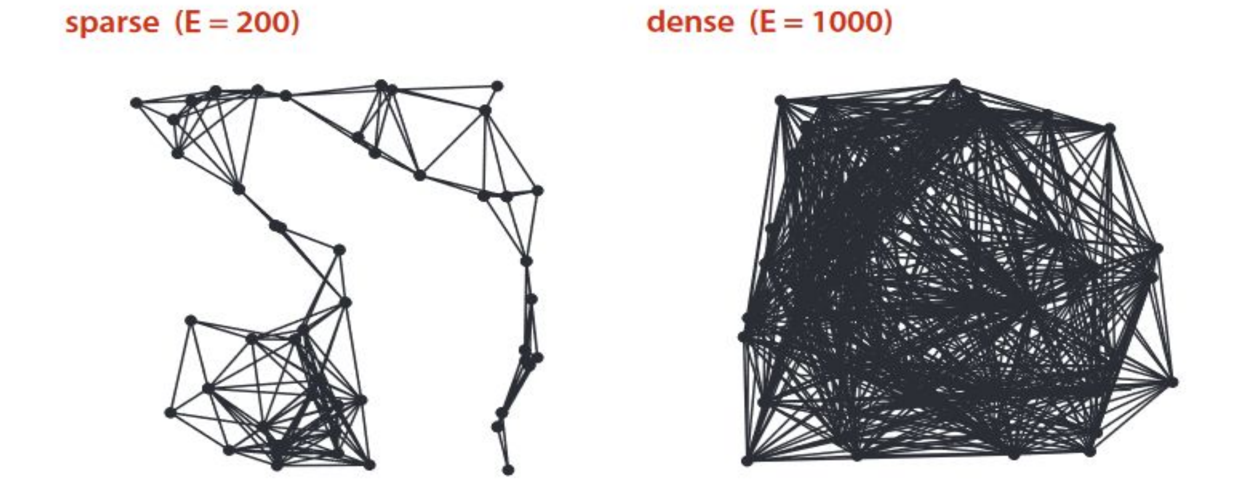
# Graph representations

In practice. Use adjacency-lists representation.

- Algorithms based on iterating over vertices adjacent to $v$.
- Real-world graphs tend to be sparse (not dense).

proportional to $V$ edges

proportional to $V^2$ edges




Two graphs (V = 50)

# Сложност на различните представяния

| representation | space | add edge | edge between v and w? | iterate over vertices adjacent to v? |
|---|---|---|---|---|
| list of edges | $E$ | 1 | $E$ | $E$ |
| adjacency matrix | $V^2$ | 1 † | 1 | $V$ |
| adjacency lists | $E + V$ | 1 | $degree(v)$ | $degree(v)$ |

† disallows parallel edges

# Обхождане на граф

1. Обхождане в дълбочина (dfs)
2. Обхождане в ширина (bfs)

# Обхождане в дълбочина

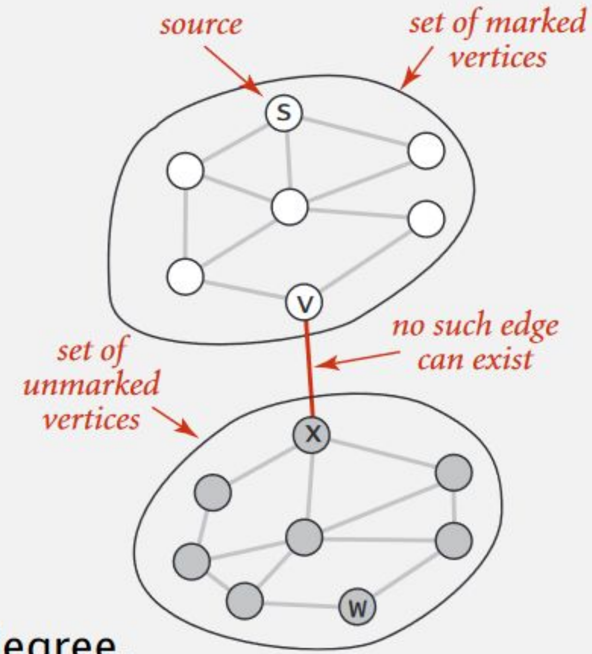
```
void dfs(int v, bool visited[], list<int> *adj; ) {
    visited[v] = true;
    //TODO: обхождането в дълбочина е с някаква цел. Например търсене на
определена характеристика. Да се добави в зависимост от задачата.

    list<int>::iterator i;
    for (i = adj[v].begin(); i != adj[v].end(); ++i){
        if (!visited[*i]){
            dfs(*i, visited,adj);
        }
    }
}
```

# Depth-first search: properties

Proposition. DFS marks all vertices connected to $s$ in time proportional to $V + E$ in the worst case.

Pf. [correctness]

- If $w$ marked, then $w$ connected to $s$ (why?)
- If $w$ connected to $s$, then $w$ marked.
  (if $w$ unmarked, then consider the last edge on a path from $s$ to $w$ that goes from a marked vertex to an unmarked one).




Pf. [running time]

- Each vertex is visited at most once.
- Visiting a vertex takes time proportional to its degree.

$$degree(v_0) \ + \ degree(v_1) \ + \ degree(v_2) \ + \ldots \ = \ 2E$$

# Обхождане в ширина

```
void BFS(int s,list<int> *adj) {
	bool *visited = new bool[V];
	for(int i = 0; i < V; i++){
		visited[i] = false;
	}
	list<int> queue;
	queue.push_back(s);
	visited[s] = true;
	list<int>::iterator i;
	while(!queue.empty()) {
		s = queue.front();
		queue.pop_front();
		// TODO:обхождането в ширина е с някаква цел.
		for (i = adj[s].begin(); i != adj[s].end(); ++i) {
			if (!visited[*i]) {
				visited[*i] = true;
				queue.push_back(*i);
			}
		}
	}
}
```

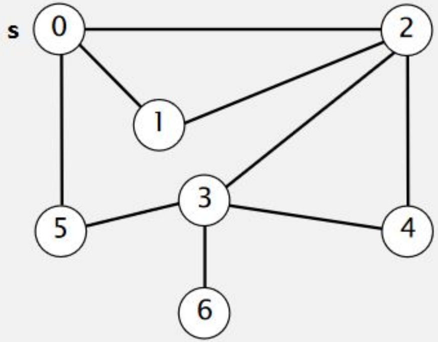
# Breadth-first search properties

Q. In which order does BFS examine vertices?

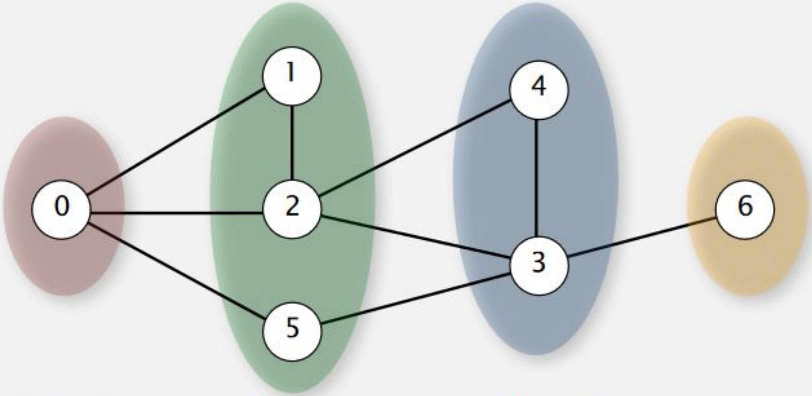
A. Increasing distance (number of edges) from $s$.

queue always consists of $\geq 0$ vertices of distance $k$ from $s$, followed by $\geq 0$ vertices of distance $k+1$

**Proposition.** In any connected graph $G$, BFS computes shortest paths from $s$ to all other vertices in time proportional to $E + V$.




graph G



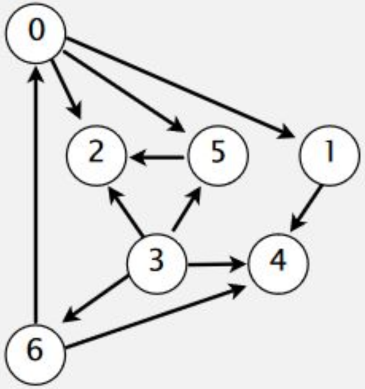

dist = 0 dist = 1 dist = 2

# Топологична наредба на граф

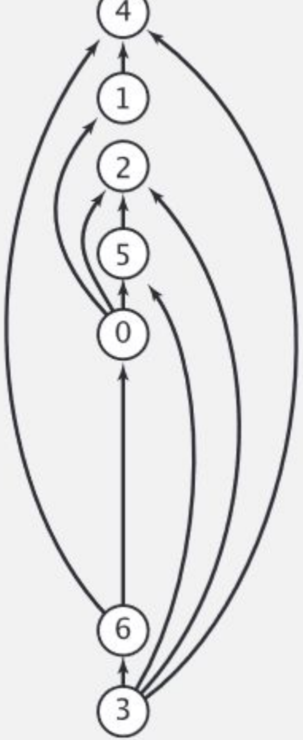
- Задача за насочен ацикличен граф
- Да се наименоват възлите с числа, така че всяко насочено ребро да започва от възел с по-малко число и да отива във възел с по-голямо число.

| | |
|---|---|
| 0→5 | 0→2 |
| 0→1 | 3→6 |
| 3→5 | 3→4 |
| 5→2 | 6→4 |
| 6→0 | 3→2 |
| 1→4 | |

**directed edges**




**DAG**




**topological order**

# Алгоритми за решаване на Топологична наредба

- BFS
- DFS

# Решение с BFS

```
L ← Empty list that will contain the sorted elements
S ← Set of all nodes with no incoming edge
while S is non-empty do
    remove a node n from S
    add n to tail of L
    for each node m with an edge e from n to m do
        remove edge e from the graph
        if m has no other incoming edges then
            insert m into S
if graph has edges then
    return error   (graph has at least one cycle)
else
    return L   (a topologically sorted order)
```

# Решение с DFS

```
L ← Empty list that will contain the sorted nodes
while there are unmarked nodes do
    select an unmarked node n
    visit(n)

 function visit(node n)
    if n has a permanent mark then return
    if n has a temporary mark then stop   (not a DAG)
    mark n temporarily
    for each node m with an edge from n to m do
        visit(m)
    mark n permanently
    add n to head of L
```

| graph problem | BFS | DFS | time |
|---|---|---|---|
| s-t path | ✔ | ✔ | $E + V$ |
| shortest s-t path | ✔ | | $E + V$ |
| cycle | ✔ | ✔ | $V$ |
| Euler cycle | | ✔ | $E + V$ |
| Hamilton cycle | | | $2^{1.657\,V}$ |
| bipartiteness (odd cycle) | ✔ | ✔ | $E + V$ |
| connected components | ✔ | ✔ | $E + V$ |
| biconnected components | | ✔ | $E + V$ |
| planarity | | ✔ | $E + V$ |
| graph isomorphism | | | $2^{c \ln^3 V}$ |

# Това е всичко за днес!

Какво следва:

- Live coding session?
- Неделя(15.12 ot 13:15) “FMI All-Stars” - “Machine Learning Engineer 101”?
- Следваща лекция - Най-къс път в граф, алгоритъм на Дейкстра
- Четвъртък(20.12) от 16:30 контролно с задачи от материала до сега (включващ и Хеш таблица и Граф)

# Live Demo Problem

https://www.hackerrank.com/challenges/journey-to-the-moon/problem

Решението и е публикувано в слак.