Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2018/2019 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	Общо
получени точки				
максимум точки	*25*	*25*	*50*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Нека K_n е пълният неориентиран граф с n върха без примки, а $P(n\,,\ r)$ е следното съждение: "Както и да оцветим ребрата на K_n с r цвята, ще има едноцветен триъгълник."

а) Докажете твърдението $P(6,\ 2)$ чрез принципа на Дирихле. **(5 точки)**

б) Докажете твърдението $P(17,\ 3)$, като го сведете до $P(6,\ 2)$ чрез принципа на Дирихле. **(5 точки)**

в) За всяко цяло положително r намерете най-малкото $n = n(r)$, за което твърдението $P(n\,,\ r)$ може да се докаже по подобен начин, т.е. чрез свеждане на $P(n(r)\,,\ r)$ до $P(n(r-1)\,,\ r-1)$ с помощта на принципа на Дирихле. (Забележете, че не се търси най-малкото n, за което $P(n\,,\ r)$ е истина. Това е нерешена задача.) Опростете формулата за $n(r)$ колкото може повече. Тя трябва да бъде точна (без приближения) и затворена (да не съдържа многоточия и непресметнати суми и произведения с променлив брой членове). Допустимо е формулата да съдържа факториели. **(15 точки)**

Задача 2. Нека $n(!)^2 = (n!)!$, $n(!)^3 = ((n!)!)!$, изобщо $n(!)^k = (\ldots(n!)!\ \ldots)!$ с k удивителни. В частност, $n(!)^1 = n!$, $n(!)^0 = n$. Трябва да се прави разлика между $n(!)^k$ и $(n!)^k$. Например $3(!)^2 = (3!)! = 6! = 720$, а пък $(3!)^2 = 6^2 = 36$.

Докажете, че $n(!)^k$ се дели на $(n!)^{\left(n(!)^0-1\right)!\ \left(n(!)^1-1\right)!\ \left(n(!)^2-1\right)!\ \ldots\ \left(n(!)^{k-2}-1\right)!}$ при $k \geq 2$.

Задача 3. Намерете броя на пермутациите $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_n$ на числата $1,\ 2,\ \ldots\,,\ n$ с единствен индекс i (зависещ от пермутацията), за който $a_i > a_{i+1}$, тоест $a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots\ < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \ \ldots\ < a_{n-1} < a_n$.
Задачата да се реши по два начина — със и без рекурентно уравнение.

(Всеки от тези два начина носи по 25 точки.)