

**1. TupleSum:** Даден е масив  $A[1..n]$  от положителни и отрицателни цели числа. Можем да групираме съседни числа във двойки, като всяко число може да участва в точно една двойка. Сума на двойките наричаме сумата от произведението на числата във всяка двойка. Каква е максималната такава сума? По-формално: Множество от "двойки"  $T$  можем да дефинираме така:  $T \subset \{i \in \mathbb{N} | 1 \leq i < N\}$  и  $\forall i \in T (i + 1 \notin T)$ . Ако сумата, породена от множество двойки  $T$  отбележим с  $S(T) = \sum_{i \in T} A[i] \cdot A[i + 1]$ , то търсим  $M$ , такова че:

- съществува множество двойки  $T'$ , такова че  $S(T') = M$
- не съществува множество двойки  $T''$ , такова че  $S(T'') > M$

Съставете възможно най-бърз алгоритъм, решаващ задачата, и намерете сложността му. Приложете го върху примера. Може ли да се модифицира така, че да връща и самите двойки?

Пример: 

-5	7	4	-2	-2	-8	7	-5	4	2
----	---	---	----	----	----	---	----	---	---

**2. Uni-X:** Геодезичния Робото-Архитектурен Факултет на университета X предлага курсове, които се делят на три групи:

- входни - могат да се запишат веднага след влизането във факултета
- междинни - всеки има списък с "необходими" курсове. За да се запише курса, е необходимо **поне един** курс от "необходимите" да е завършен.
- изходни - това са междинни курсове, завършването на един от които води до успешно завършване на факултета

Общо курсовете са  $N$  на брой и са съответно номерирани с числата от 1 до  $N$ . Знаете множеството  $F$  - изходните курсове (естествено  $F \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ ). За всеки курс имате  $T_i \in \mathbb{N}$  - време за завършване, и множество  $R_i$  - "необходимите" курсове за записване на курса  $i$ . Всички курсове, за които  $R_i$  е празно, са входни. Винаги има поне един входен и поне един изходен курс (но е позволено входен и изходен да съвпадат), и винаги е възможно да се завърши. Съставете възможно най-бърз алгоритъм, намиращ минималното време за завършване на факултета. Изразете сложността му чрез  $N$  и  $M$ , където  $M = \sum_{i=1}^N |R_i|$ .

**3. Copy Paste:** Студентите от гореспоменатия факултет имат контролно по Дизайн и Анализ на Градоустройство, което по традиция е в седмица с още 4 контролни. Затова студентите са измислили следната система: За всяко контролно учи само един човек, а останалите се опитват да препишат от него - включително чрез посредници (напр. А преписва от Б, който преписва от В). Понеже това е все пак университет по архитектура, залата е със изключително странна конфигурация, която затруднява преписването. След множество проведени експерименти (т.е. контролни и изпити) студентите са установили колко добре от всяко място се преписва и от кои съседни. След един провал, състоящ се от цикъл на преписване на все по-грешни решения, студентите се уговорили да преписват само така, че да не може да се получи цикъл.

Иван влиза в залата последен и трябва да си избере място. Той знае множеството на местата  $V$ , множеството на свободните  $K \subset V$ , насочените "връзки" на преписване  $E$  (между места в залата), колко загуби(неточности) внася всяка връзка  $s : E \rightarrow \mathbb{Q}$  и естествено  $S$  - мястото, където е седнал единствения човек, който е учил за контролното. Съставате максимално бърз алгоритъм, който помага на Иван да си избере оптимално място (с минимални загуби при преписване).