1 Съждително смятане

Дефиниция 1. *Логически израз начичаме съвкупността от съждения $p, q, r, \dots,$ свързани със знаците за логически операции $\neg, \vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow$ и скоби, определящи реда на операциите.*

Дефиниция 2. *Тъждествено верен (истинен) е този логически израз, който има верностна стойност 1 при всички възможни набори на верностните стойности на съждителните променливи в израза.*

I) Комутативен закон

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \ \& \ q \equiv q \ \& \ p$$

II) Асоциативен закон

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \ \& \ q) \ \& \ r \equiv p \ \& \ (q \ \& \ r)$$

III) Дистрибутивен закон

$$p \ \& \ (q \vee r) \equiv (p \ \&q) \vee (p \ \& \ r)$$

$$p \vee (q \ \& \ r) \equiv (p \vee q) \ \& \ (p \vee r)$$

IV) Закони на Де Морган

$$\neg(p \ \& \ q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \ \& \ \neg q)$$

V) Закон за контрапозицията

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

VI) Обобщен закон за контрапозицията

$$(p \ \& \ q) \rightarrow r \equiv (p \ \& \ \neg r) \rightarrow \neg q$$

VII) Закон за изключеното трето

$$p \vee \neg p$$

VIII) Закон за силогизма (транзитивност)

$$[(p \rightarrow q) \ \& \ (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$$

Лесно се проверява с таблиците за истинност, че законите са тъждествено верни.

Задача 1. *Проверете с таблици за истинност, че следните съждителни формули са тавтологии:*

1) $(p \wedge q) \rightarrow p$;

2) $p \rightarrow (p \vee q)$;

3) $(p \rightarrow q) \iff (\neg q \rightarrow \neg p)$;

4) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

5) $(p \ \& \ q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

6) $p \ \& \ q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

7) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \ \& \ (q \rightarrow p)$

8) $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$;

9) $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$;

10) $\neg(p \to q) \iff (p \wedge \neg q)$;

Обърнете внимание, че $(p \to q) \to r$ не е еквивалентно на $p \to (q \to r)$, например вземете $p = 0, q = 0, r = 0$.

Задача 2. *Да предположим, че сме на остров, който се обитава лъжци и благородници. Лъжците винаги лъжат, а благородниците винаги казват истината. Срещаме трима човека А,Б и В.*

1) *А казва "Всички сме лъжци".*

Б казва "Точно един от нас е благородник".

Какви са А,Б и В?

2) *А казва "Всички сме лъжци".*

Б казва "Точно един от нас е лъжец".

Може ли да определим какъв е Б ? Може ли да определим какъв е В ?

3) *А казва "Б е лъжец".*

Б казва "А и В са от един и същ тип, т.е. или и двамата са благородници, или и двамата са лъжци".

Какъв е В?

2 Предикатно смятане

(I) $\neg\forall x P(x) \iff \exists x \neg P(x)$

(II) $\neg\exists x P(x) \iff \forall x \neg P(x)$

(III) $\forall x P(x) \iff \neg\exists x \neg P(x)$

(IV) $\exists x P(x) \iff \neg\forall x \neg P(x)$

(V) $\forall x \forall y P(x) \iff \forall y \forall x P(x)$

(VI) $\exists x \exists y P(x, y) \iff \exists y \exists x P(x)$

(VII) $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$

Пример 1. *Нека да вземем да дефинираме предиката $P(x, y)$ като $x = y$. Ясно е, че $\forall y \exists x (x = y)$ е истина, но не е истина, че $\exists x \forall y (x = y)$.*

Пример 2. *а) Числото y дели x без остатък.*

$$Div(x, y) \iff (\exists k)[x = ky].$$

б) Числото x е просто тогава и само тогава, когато няма други делители освен 1 и себе си.

$$Prime(x) \iff (\forall y)[1 < y < x \to \neg Div(x, y)].$$

в) Числото z е най-голям общ делител на x и y тогава и само тогава, когато z дели x и y и всяко число по-голямо от z не дели някое от x, y.

$$GCD(x, y, z) \iff Div(x, z) \ \& \ Div(y, z) \ \& \ (\forall u)[u > z \to (\neg Div(x, u) \vee \neg Div(y, u))].$$

г) Всяко решение на $f(x)$ притежава свойството $P(x)$

$$(\forall x)[f(x) = 0 \to P(x)].$$

д) $f(x)$ няма корен

$$(\forall x)[f(x) \neq 0].$$

е) $f(x)$ има поне два различни корена

$$(\exists x_1)(\exists x_2)[x_1 \neq x_2 \ \& \ f(x_1) = 0 \ \& \ f(x_2) = 0].$$

ж) $f(x)$ има точно два различни корена

$$(\exists x_1)(\exists x_2)[x_1 \neq x_2 \ \& \ f(x_1) = 0 \ \& \ f(x_2) = 0 \ \& \ (\forall z)[f(z) = 0 \to (z = x_1 \ \vee \ z = x_2)]].$$

з) Нека $P(x, y)$ означава, че x е родител на y. Всички хора имат поне двама родители:

$$\forall x \exists y \exists z[P(y, x) \ \& \ P(z, x) \ \& \ y \neq z].$$

Дефинирайте предикат $Q(x, y)$, който е верен тогава и само тогава, когато x е наследник на y.

$$\forall x \forall y[Q(x, y) \iff [P(y, x) \vee \exists z(P(z, x) \ \& \ Q(z, y))]].$$

и) Нека имаме даден предиката $Seq(x)$, който е верен тогава и само тогава, когато x е безкрайна редица от реални числа. Нека също имаме $I(x, y, z)$, който е верен тогава и само тогава, когато $Seq(x)$ и y е естествено число, и z е y-тия член на редицата.

- *Една безкрайна редица $a_1, a_2, \ldots$ е сходяща и клони към числото a, ако за всяко положително число ε можем да намерим такова число ν, че при $n > \nu$ имаме, че $|a_n - a| < \varepsilon$.*

$$Limit(x, y) \iff Seq(x) \ \& \ (\forall u)(\exists v)(\forall n)(\forall z)[(n > v \ \& \ I(x, n, z)) \to |z - y| < u]$$

- *Една безкрайна редица $a_1, a_2, \ldots$ клони към безкрайност, ако за всеки избор на положително число A може да се намери такова число ν, че при $n > \nu$ да имаме $a_n > A$.*

$$Inf(z) \iff Seq(z) \ \& \ (\forall x)(\exists y)(\forall n)(\forall u)[(n > y \ \& \ I(z, n, u)) \to u > x]$$

- *Сега искаме да запишем в езика на логиката теоремата, че всяка сходяща редица има единствена граница.*

$$(\forall x)[(Seq(x) \ \& \ (\exists y)(Limit(x, y))) \to (\forall u)(\forall v)(Limit(x, u) \ \& \ Limit(x, v) \to u = v)],$$

  което може да се запише и така

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)[(Seq(x) \ \& \ Limit(x, y)) \to (Limit(x, u) \ \& \ Limit(x, v) \to u = v)],$$

  което е еквивалентно на

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)[(Limit(x, y) \ \& \ Limit(x, u)) \to y = u]$$

- *Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ е сходяща с граница a, и ако за всяко n имаме $a_n \leq l$, където l е някакво реално число, то и $a \leq l$.*

$$(\forall \alpha)(\forall a)[Limit(\alpha, a) \to (\forall l)[(\forall n)(\forall u)(I(\alpha, n, u) \to u \leq l) \to a \leq l]],$$

  което е еквивалентно на

$$(\forall \alpha)(\forall a)(\forall l)(\exists n)(\exists u)[Limit(\alpha, a) \to [(I(\alpha, n, u) \to u \leq l) \to a \leq l]],$$

Задача 3. *На всеки от по-горе дефинираните предикати напишете неговото отрицание.*