1 Операции върху множества

Дефинираме следните операции върху множества:

(i) Сечение, $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$;

(ii) Обединение, $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$

(iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i(1 \leq i \leq n \ \& \ x \in A_i\}$;

(iv) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow x \in A_i)\}$;

(v) Разлика, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}$;

(vi) Симетрична разлика, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(vii) $\bigcup A = \{x \mid (\exists y \in A)[x \in y]\}$;

(viii) $\bigcap A = \{x \mid (\forall y \in A)[x \in y]\}$;

(ix) Степенно множество, $\mathscr{P} A = \{x \mid x \subseteq A\}$.

Тук имаме проблем с значението на $\bigcap \emptyset$. На пръв поглед изглежда, че $\bigcap \emptyset$ е множеството от всички множества V, но ние знаем, че такова множество не съществува. Това в известен смисъл е аналог на делението на нула. Ние ще приемем, че $\bigcap \emptyset = \emptyset$.

Пример 1. *Нека* $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$ *и* $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$. *Тогава :*

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$,

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$,

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$,

$B \setminus A = \emptyset$,

$A \triangle B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$

Задача 1. *Нека* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ *и* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq \frac{1}{2}\}$. *Намерете* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

Пример 2.

$$\bigcap \{\{1,2,3,4\},\{2,4\},\{1,3,4\}\} = \{4\}$$

$$\bigcup \{\{3\},\{2,4\},\{1,4\}\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\bigcap \{\{a\},\{a,b\}\} = \{a\} \cap \{a,b\} = \{a\}$$

$$\bigcup \bigcap \{\{a\},\{a,b\}\} = \bigcup \{a\} = a$$

Задача 2. *Нека* $B = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\emptyset\}\}$. *Намерете* $\bigcup B$, $\bigcap B$, $\bigcap \bigcup B$ *и* $\bigcup \bigcap B$.

Пример 3. *Ето няколко примера, които показват действието на някои от операциите*

1) $\mathscr{P} \emptyset = \{\emptyset\}$
$\mathscr{P} \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathscr{P} \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

2) $\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$
$\bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$
$\bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

з) $\bigcap\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \emptyset$

Задача 3. *1. Намерете двуелементно множество такова, че всеки елемент на множеството да е също и негово подмножество.*

2. Намерете триелементно множество такова, че всеки елемент на множеството да е също и негово подмножество.

3. Намерете четириелементно множество такова, че всеки елемент на множеството да е също и негово подмножество.

Задача 4. *Докажете:*

1. $\bigcup \mathscr{P} A = A$;
2. $A \subseteq \mathscr{P} \bigcup A$; *кога имаме равенство?*
3. $\mathscr{P} A \cap \mathscr{P} B = \mathscr{P}(A \cap B)$;
4. $\mathscr{P} A \cup \mathscr{P} B \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$; *кога имаме равенство?*
5. *съществуват множества* a *и* B, *за които* $a \in B$, *но* $\mathscr{P} a \not\subseteq \mathscr{P} B$;
6. *ако* $a \in B$, *то* $\mathscr{P} a \in \mathscr{P}\mathscr{P} B$;
7. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathscr{P}\mathscr{P} A$, *за всяко множество* A.

Задача 5. *Проверете:*

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

б) $X \subseteq A \ \&\ X \subseteq B \to X \subseteq A \cap B$

в) $A \subseteq X \ \&\ B \subseteq X \to A \cup B \subseteq X$

г) $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)$

д) $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cup B)$

е) $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

ж) $A \backslash B = A \iff A \cap B = \emptyset$

з) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$

и) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

к) $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$

л) $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n}(X \backslash A_i)$

м) $X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

н) $X \backslash (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(X \backslash A_i)$

о) $A \cup \bigcap B = \{A \cup X \mid X \in B\}$, *за* $B \neq \emptyset$

п) $A \cap \bigcup B = \{A \cap X \mid X \in B\}$

р) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$

с) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

т) $A \triangle B = B \triangle A$

у) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

ф) $A \backslash B = A \triangle (A \cap B)$

х) $A \cap (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

ц) $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$

ч) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$

ш) $A \triangle B = C \iff B \triangle C = A \iff C \triangle A = B$

Задача 6. *Да се решат системите с променлива X:*

(а) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ X \setminus A & = & C \end{array} \right.$ *, където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$;*

(б) $\left| \begin{array}{lcl} A \cap X & = & B \\ A \cup X & = & C \end{array} \right.$ *, където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$;*

(в) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ A \cup X & = & C \end{array} \right.$ *, където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$.*

Задача 7. *Нека множеството A е дефинирано по следния начин:*

1. $0 \in A$
2. *Ако $x \in A$, то $2x + 1 \in A$.*

Намерете A.

Proof. $A = \{2^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

Теорема 1. *Нека множеството A е дефинирано по следния начин:*

(1) $1 \in A$

(2) Ако $m, n \in A$, то $2m + 3n \in A$.

(3) Всички елементи на A са добавени или по правило (1) или правило (2).

Намерете A.

Proof. Нека $B = \{n \mid n \equiv 1 (mod 12) \ \vee n \equiv 5 (mod 12)\}$. Искаме да докажем, че $A = B$. Първо ще докажем, че $A \subseteq B$. За целта проверяваме, че $1 \in B$ и ако $m, n \in B$, то $2m + 3n \in B$.

За другата посока, т.е. $B \subseteq A$, трябва да докажем, че ако за всяко $k \leq n$ е вярно, че $12k + 1 \in B$ и $12k + 5 \in B$, то е вярно, че $12(n + 1) + 1 \in B$ и $12(n + 1) + 5 \in B$. □