1 Декартово произведение

Въвеждаме операция наредена двойка $\langle x, y\rangle$, която искаме да има следните свойства:

1. $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \iff x = x' \ \& \ y = y'$;
2. класът $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$ е множество.

Дефиниция 1 (Куратовски)**.** *Наредена двойка* $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Първото свойство се проверява лесно. За второто свойство, достатъчно е да покажем, че за произволни множества A, B можем да изберем множество C, за което е изпълнено, че

$$x \in A \ \& \ x \in B \to \{x, \{x, y\}\} \in C.$$

Ако успеем да намерим такова множество C, то тогава от аксиомата за отделянето следва, че $A \times B$ е множество, защото $A \times B = \{z \in C \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \langle x, y\rangle]\}$ е множество.

Лесно може да се провери, че $C = \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$ върши работа.

Възможно е да се дадат и други дефиниции на наредена двойка.

Задача 1. *Проверете кои от следните операции отговарят на условията за наредена двойка.*

1. $\langle x, y\rangle_1 = \{x, y\}$;
2. $\langle x, y\rangle_2 = \{x, \{y\}\}$;
3. $\langle x, y\rangle_3 = \{\{\emptyset, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}$;
4. $\langle x, y\rangle_4 = \{\{0, x\}, \{1, y\}\}$, *където* $0, 1$ *са различни обекти.*

Задача 2. *Проверете:*

1. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
4. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
5. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
6. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
7. $(A \backslash C) \times (B \backslash D) \subsetneq (A \times B) \backslash (C \times D)$

2 Релации

Дефиниция 2. *Една релация* $R \subseteq A^2$ *е:*

1) *антирефлексивна, ако* $(\forall x \in A)[(x, x) \notin R]$

2) *рефликсивна, ако* $(\forall x \in A)((x, x) \in R)$;

3) *транзитивна, ако* $(\forall x, y, z \in A)((x, y) \in R \ \& \ (y, z) \in R \to (x, z) \in R)$;

4) *симетрична, ако* $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;

5) антисиметрична, ако $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \ \& \ (y, x) \in R \to x = y)$*;*

6) асиметрична, ако $(\forall x, y)[(x, y) \in R \to (y, x) \notin R]$.

Задача 3. *Докажете, че:*

а) R *е симетрична тогава и само тогава, когато* $R^{-1} \subseteq R$*;*

б) R *е транзитивна тогава и само тогава, когато* $R \circ R = R$*;*

в) R *е транзитивна и симетрична тогава и само тогава, когато* $R = R^{-1} \circ R$.

Задача 4. *Проверете за* R *дали е рефлексивна, транзитивна, симетрична, антисиметрична или асиметрична релация.*

а) $R \subsetneq \mathbb{N}^2, aRb \iff a|b$

б) $R \subseteq \mathbb{R}^2, aRb \iff a.b > 0$

в) $R \subseteq \mathbb{R}^2, aRb \iff a + b = 0$

г) $R \subseteq \mathbb{R}^2, aRb \iff a + b = 5$

д) $R \subseteq \mathbb{R}^2, aRb \iff a + b$ *е четно*

е) $R \subseteq (\mathbb{R}^2)^2, \langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle \iff a.d = b.c$

ж) $R_m \subseteq \mathbb{Z}^2, m \in \mathbb{Z}, m > 0, aR_m b \iff m \mid (a - b)$

з) $R \subseteq \mathbb{R}^2, xRy \iff (x - y)$ *е рационално число*

и) $aRb \iff a, b \in \mathbb{N} \ \& \ (a = b \vee a + 1 = b)$

к) $aRb \iff a, b \in \mathbb{N} \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N})(a + k = b)$

л) Нека $\leq_1$ *е ч.н. върху* A*,* $\leq_2$ *е ч.н. върху* B. $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle \iff a \leq_1 c \ \& \ b \leq_2 d$

м) Нека $\leq_1$ *е ч.н. върху* A*,* $\leq_2$ *е ч.н. върху* B. $\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle \iff a \leq_1 c \ \vee \ b \leq_2 d$

н) $f : X \to Y$*,* $R \subseteq (2^X)^2, ARB \iff f(A) = f(B)$

Дефиниция 3. 1. *Азбука е крайно множество* $X = \{a_1, \ldots, a_n\}, \varepsilon \notin X$*. Елементите на* X *наричаме букви.*

2. *Думи над азбуката* X *са:*

   (а) ε *е дума над* X*, наричаме я празната дума.*

   (б) *Нека* α *е дума над* X*. Тогава за всяко* $i \leq n$ *имаме, че* αa_i *е дума над* X*;*

   (в) *няма други думи над* X*.*

3. *Нека* $\alpha = a_{i_1} \ldots a_{i_m}$ *и* $\beta = b_{j_1} \ldots b_{j_n}$ *са думи над* X*.* α *е начало на* β*, ако* $m \leq n$ *и* $(\forall k \leq m)(a_{i_k} = b_{j_k})$*.* α *е край на* β*, ако* $m \leq n$ *и* $(\forall k \leq m)(a_{i_{(m-k)}} = b_{j_{(n-k)}})$*.*

Означаваме с X^n *множеството от всички думи с дължина* n *над азбуката* X*,* $X^0 = \{\varepsilon\}$*. С* X^* *означаваме множеството от всички думи над азбуката* X*, т.е.* $X^* = \bigcup_{0 \leq n} X^n$*.*

Дефинираме дължината $|\alpha|$ на думите $\alpha \in X^*$ с индукция:

(0) $|\varepsilon| = 0$;

(n+1) Ако $\alpha = \beta a_i \in X^*$, то $|\alpha| = |\beta| + 1$.

Задача 5. *Проверете кои от следните релации са частични наредби.*

а) $\alpha R\beta \iff \alpha$ *е начало на* β

б) $\alpha R\beta \iff \alpha$ *е край на* β

в) $\alpha R\beta \iff \alpha$ *е начало на* $\beta \vee (\exists \alpha_1 \in X^*)(\exists a, b \in X)(\alpha_1 a$ *е начало на* α & $\alpha_1 b$ *е начало на* $\beta)$

г) $R \subseteq (\{0,1\}^n)^2, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle R \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \iff a_1 \leq b_1$ & ... & $a_n \leq b_n$ *Забележете, че това не е лексикографската наредба.*

д) $R \subseteq (\{0,1\}^n)^2, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle R \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \iff (\exists i : 1 \leq i \leq n)((\forall j < i)(a_j = b_j)$ & $a_i \leq b_i)$