

Редукции

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

12–19 март 2019 г.

Операционна семантика на λ -смятането

Основно изчислително правило в λ -смятането:

$$\underbrace{(\lambda_x M)N}_{\beta\text{-редекс}} \xrightarrow{\beta} \underbrace{M[x \mapsto N]}_{\beta\text{-редукт}}$$

В един терм може да има повече от един β -редекс.

Искаме да можем да прилагаме редукцията на произволна позиция в терма!

Подтерм

Дефиниция (Подтермове)

Дефинираме функцията $Sub : \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, задаваща множество от подтермове на даден терм:

- ① $Sub(x) := \{x\}$
- ② $Sub(M_1 M_2) := Sub(M_1) \cup Sub(M_2) \cup \{M_1 M_2\}$
- ③ $Sub(\lambda_x N) := Sub(N) \cup \{\lambda_x N\}$

Ако $M \in Sub(N)$ пишем $M \leq N$.

Примери: $\lambda_x x$, $\lambda_{x,y} xy$, $x(\lambda_y xy)$

Задача

Докажете, че релацията \leq е частична наредба, т.е. че е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

Подтерм: алтернативни дефиниции

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №1)

- 1 $M \preceq M$
- 2 Ако $MN \preceq P$, то $M \preceq P$ и $N \preceq P$
- 3 Ако $\lambda_x M \preceq N$, то $M \preceq N$

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №2)

- 1 $M \trianglelefteq M$
- 2 Ако $M \trianglelefteq N$ и $P \in \Lambda$, то $M \trianglelefteq NP$ и $M \trianglelefteq PN$
- 3 Ако $M \trianglelefteq N$ и $x \in V$, то $M \trianglelefteq \lambda_x N$

Задача

Докажете, че трите дефиниции за подтерм са еквивалентни, т.е.

$$M \leq N \iff M \preceq N \iff M \trianglelefteq N.$$

λ -затваряне

Трябва да формализираме идеята за “на произволно място в терма”.

Дефиниция (λ -затваряне)

Нека е $R \subseteq \Lambda^2$ е редукция. Дефинираме индуктивно релацията R^λ :

- ① Ако $(M, N) \in R$, то $(M, N) \in R^\lambda$ (т.е. $R \subseteq R^\lambda$)
- ② Ако $(M, N) \in R^\lambda$, $P \in \Lambda$ и $x \in V$, то
 - $(MP, NP) \in R^\lambda$,
 - $(PM, PN) \in R^\lambda$,
 - $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in R^\lambda$.

Ако $R^\lambda = R$, казваме че R е λ -съвместима.

λ -затваряне: примери и свойства

Пример: \equiv и $\stackrel{\alpha}{\equiv}$ са λ -съвместими. Други примери?

λ -съвместима ли е релацията \leq ? Защо?

Пример: Нека фиксираме $x \in V$ и нека $R := \{(x, P) \mid P \in \Lambda\}$. $R^\lambda = ?$

Задача

Докажете, че за произволно $R \subseteq \Lambda^2$, R^λ е λ -съвместима.

λ -контексти

Нека фиксираме специална променлива $\square \in V$.

Дефиниция (λ -контекст)

Дефинираме множеството $\Lambda^\square \subseteq \Lambda$:

- ① $\square \in \Lambda^\square$
- ② Ако $E \in \Lambda^\square$ и $M \in \Lambda$, то $ME, EM \in \Lambda^\square$
- ③ Ако $E \in \Lambda^\square$ и $x \in V$, то $\lambda_x E \in \Lambda^\square$.

Ще отбелязваме $E[M] := E[\square \mapsto M]$, при която субституцията **се отказваме от конвенцията, т.е. позволяваме прихващане.**

Задача

Да се докаже, че:

- ① $M \leq E[M]$ за произволни $M \in \Lambda$ и $E \in \Lambda^\square$
- ② Ако $M \leq N$, то съществува $E \in \Lambda^\square$ такава, че $E[M] \equiv N$

Изразяване на λ -затваряне чрез контекст

Задача

Нека $R \subseteq \Lambda^2$ е произволна редукция.

Да се докаже, че $(M, N) \in R^\lambda$ тогава и само тогава, когато съществуват $E \in \Lambda^\square$ и два подтерма $M' \leq M$ и $N' \leq N$, такива че:

- 1 $E[M'] \equiv M$
- 2 $E[N'] \equiv N$
- 3 $(M', N') \in R$.

β -редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\beta}$, β -редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \{((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N]) \mid M, N \in \Lambda, x \in V\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\beta} := \beta^\lambda$ (β -редукция)
- $\xleftarrow{\beta} := (\xrightarrow{\beta})^{-1} := \{(M, N) \mid N \xrightarrow{\beta} M\}$ (β -експанзия)
- $\xrightarrow{\beta} := \beta^{\lambda, R, T} = (\xrightarrow{\beta})^{R, T}$ (многостъпкова β -редукция)
- $\equiv := \beta^{\lambda, R, S, T} = (\xrightarrow{\beta})^{R, S, T} = (\xrightarrow{\beta})^{S, T}$ (β -еквивалентност)

Примери за β -редукция

Примери:

- $(\lambda_x x)y$
- $\lambda_z(\lambda_{x,y}x)(\lambda_u u)(\lambda_u uzu)z$
- $(\lambda_x xz)((\lambda_y zy)z)$

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^* ?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \xrightarrow{\beta} ?$
- $(02)[0 \mapsto 1] \equiv ?$
- Откъде идва проблемът и как да го решим?

β -редукция на безименни термове (2)

Задача

Да се дефинира формално релацията $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^* и да се докаже, че двете β -редукции са съгласувани, т.е. за произволен контекст от имена Γ :

- 1 Ако $M, N \in \Lambda_{\text{dom } \Gamma}$ и $M \xrightarrow{\beta} N$, то $b_{\Gamma}(M) \xrightarrow{\beta} b_{\Gamma}(N)$.
- 2 Ако $M, N \in \Lambda_{|\Gamma|}$ и $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\exists P \stackrel{\alpha}{=} \#_{\Gamma}(N)$ такава, че $\#_{\Gamma}(M) \xrightarrow{\beta} P$.

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- K^*IKIK^*
- $SIII$
- SKK
- SKS
- SK

Комбинаторите K и S

Оказва се, че комбинаторите S и K са достатъчни да изразят всички λ -термове!

Лема 1

Нека $M, N \in \Lambda$. Тогава

- 1 $\lambda_x x \stackrel{\beta}{=} SKK,$
- 2 $\lambda_x M \stackrel{\beta}{=} KM,$ ако $x \notin FV(M),$
- 3 $\lambda_x MN \stackrel{\beta}{=} S(\lambda_x M)(\lambda_x N).$

- K^*
- $\lambda_{x,y} xy$

Комбинаторна логика

Дефиниция (Апликативни термове, АЛ)

- 1 Ако $x \in V$, то $x \in \text{АЛ}$.
- 2 Ако $M, N \in \text{АЛ}$, то $MN \in \text{АЛ}$.

Задача

Нека k и s са две фиксирани променливи от V .

Да се дефинира изображение $\Phi : \Lambda \rightarrow \text{АЛ}$, което превежда произволен λ -терм в апликативен, т.е. да се покаже, че за произволно $M \in \Lambda$:

- 1 $\text{FV}(\Phi(M)) \subseteq \text{FV}(M) \cup \{k, s\}$ и
- 2 $M \stackrel{\beta}{=} \Phi(M)[k \mapsto K][s \mapsto S]$.

Да се направи програмна реализация на изображението Φ .

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ... дължината на терм да се запази след редукция?
- ... дължината на терм да нарасне след редукция?
- ... да имаме безкрайна редица от редукции?
- ... да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Каква е оценката на:

- $|M[x \mapsto N]|?$
- $|N|$, ако $M \xrightarrow{\beta} N?$
- $|M_k|$, ако $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} M_k?$

Операционна еквивалентност

Релацията $\stackrel{\beta}{=}$ може да се разглежда като *операционна еквивалентност* на термове,
 т.е. два терма са β -еквивалентни, ако чрез поредица от изчисления
 можем да стигнем от единия до другия.

Дефиниция (Операционна еквивалентност)

Казваме, че в λ -смятането два терма M и N са *операционно еквивалентни*, ако $M \stackrel{\beta}{=} N$ и бележим $\lambda \models M = N$.

Операционното еквивалентност е вид *интенционално равенство*, т.е. равенство на термовете, което е породено от тяхната вътрешна структура.

Екстенционално равенство

В теорията на множествата имаме *Аксиома за екстенционалност*:

$$\forall X, Y (\forall Z (Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \rightarrow X = Y),$$

т.е. две множества считаме за равни, ако се състоят от равни елементи.

В λ -смятането казваме, че два терма са *екстенционално равни*, ако те имат еднакво поведение, независимо, че може да са различни по структура.

Пример: $\lambda_x f x \stackrel{\beta}{\neq} f$, но за произволен терм M имаме $(\lambda_x f x) M \stackrel{\beta}{=} f M$.

Екстенционално равенство на термове

Дефиниция (екстенционално равенство)

Казваме, че M и N са екстенционално равни и бележим $\lambda + \text{ext} \models M = N$, ако

- ① $\lambda \models M = N$,
- ② за произволно $x \notin FV(MN)$ е вярно, че $\lambda + \text{ext} \models Mx = Nx$.

Задача

Да се докаже, че релацията $\lambda + \text{ext} \models M = N$ е λ -съвместима релация на еквивалентност.

η -редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η -редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \text{FV}(M)\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\eta} := \eta^\lambda$ (η -редукция)
- $\xleftarrow{\eta} := (\xrightarrow{\eta})^{-1} := \{(M, N) \mid N \xrightarrow{\eta} M\}$ (η -експанзия)
- $\xrightarrow{\eta} := \eta^{\lambda, R, T} = (\xrightarrow{\eta})^{R, T}$ (многостъпкова η -редукция)
- $\underline{\underline{=}} := \eta^{\lambda, R, S, T} = (\xrightarrow{\eta})^{R, S, T} = (\xrightarrow{\eta})^{S, T}$ (η -еквивалентност)

$\beta\eta$ -еквивалентност \iff екстенционално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ точно тогава, когато $\lambda + \text{ext} \models M = N$.

Доказателство.

(\Leftarrow) Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.

β) По дефиниция

η) Тогава $M \equiv \lambda_x N x$, откъдето следва по дефиниция.

(\Rightarrow) Индукция по $\lambda + \text{ext} \models M = N$.

Нека $\lambda + \text{ext} \models M x = N x$ за произволно $x \notin \text{FV}(MN)$.

Тогава за всяко такова x по ИП имаме: $M \stackrel{\eta}{=} \lambda_x M x \stackrel{\beta\eta}{=} \lambda_x N x \stackrel{\eta}{=} N$. □