

Нормализация и конfluентност

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

26 март–9 април 2019 г.

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M е в (β) -нормална форма, ако той не може да бъде (β) -редуциран, т.е. $\nexists N \in \Lambda M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма
- Ω, Y, Θ не са в нормална форма

Дефиниция

Казваме, че термът N е (β) -нормална форма на терма M , ако $M \xrightarrow{\beta} N$ и N е в нормална форма. В такъв случай, казваме че термът M има нормална форма.

Ако в допълнение $M \xrightarrow{\beta} N$, казваме че термът M е нормализируем.

Силна нормализируемост

Дефиниция (редукционна редица)

Крайна или безкрайна редица от термове $\{M_n\}$ наричаме *редукционна*, ако $M_{n-1} \xrightarrow{\beta} M_n$ за произволен индекс $n > 0$ от редицата.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако всяка редукционна редица, започваща с M , е крайна.

Тривиални факти

- всеки терм в нормална форма е силно нормализируем
- всеки силно нормализируем терм е нормализируем

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?
- Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?
- Има ли термове, които са нормализируеми, но не са силно нормализируеми?
- Има ли стратегия за редукция, която винаги намира нормалната форма на нормализируем терм?
- Може ли алгоритмично да определим дали един терм е нормализируем?
- Може ли алгоритмично да определим дали един терм е силно нормализируем?

Редукционен граф

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна бинарна релация, която наричаме *редукция*.

Дефиниция (транзитивно покритие)

Транзитивно покритие на даден терм M относно релацията D наричаме множеството $V_D(M) := \{N \mid (M, N) \in D^{\lambda, R, T}\}$. В частност за $D = \beta$, $V_\beta(M) := \left\{ N \mid M \xrightarrow{\beta} N \right\}$.

Дефиниция (редукционен граф)

D -редукционен граф на терма M наричаме ориентирания граф $G_D(M) := \langle V_D(M), D^\lambda \rangle$.

Всеки (краен или безкраен) път в графа $G_\beta(M)$ съответства еднозначно на редукционна редица.

Примери за редукционни графи

Да се построят β -редукционните графи на:

- S, K, I
- $Ix, I(Ix)$
- $\Omega, KI\Omega$
- $\omega_3\omega_3$

Въпроси за редукционен граф

Каква е логическо-следствената връзка между следните твърдения:

- $G_\beta(M)$ е краен
- $G_\beta(M)$ е ацикличен
- M е нормализируем
- M е силно нормализируем

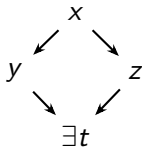
Свойство на диаманта

Дефиниция (\diamond)

Казваме, че дадена бинарна релация D е диамантена или удовлетворява свойството \diamond , ако

$$\forall_{x,y,z} \left((x,y) \in D \wedge (x,z) \in D \rightarrow \exists t \left((y,t) \in D \wedge (z,t) \in D \right) \right)$$

или представено графично:



Конфлуентност

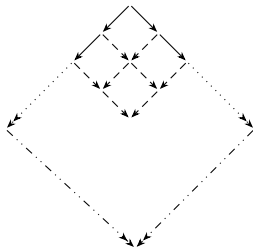
Дефиниция (конфлуентност)

Казваме, че една релация D е конфлуентна, ако $D^{R,T}$ е \diamond .

Лема 1

Ако D е \diamond , то D е конфлуентна.

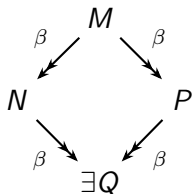
Доказателство.



Конфлуентност на β -редукцията

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна, т.е. $\xrightarrow{\beta} e \diamond$ или:



Ще приведем доказателство на Tait и Martin-Löf.

Субституция и редукция

Лема 2

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна редукция. Тогава ако $(N, N') \in D^{\lambda, R, T}$, то $(M[x \mapsto N], M[x \mapsto N']) \in D^{\lambda, R, T}$ за произволен терм $M \in \Lambda$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на субституция. □

Лема 3

Ако $M \xrightarrow{\beta} M'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{\beta} M'[x \mapsto N]$ за произволен терм $N \in \Lambda$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $\xrightarrow{\beta}$, с използване на Лемата за субституцията. □

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

- 1 $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
- 2 ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
- 3 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
- 4 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 4

Ако $N \xrightarrow{1} N'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$

Доказателство.

Индукция по M .



Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

- ❶ $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
- ❷ ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
- ❸ ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
- ❹ ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 5

Ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $M \xrightarrow{1} M'$. □

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

- 1 $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
- 2 ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
- 3 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
- 4 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 6

- 1 Ако $\lambda_x M \xrightarrow{1} N$, то $\exists_{M' \xrightarrow{1} M} (N \equiv \lambda_x M')$
- 2 Ако $MN \xrightarrow{1} L$, то
 - a $\exists_{M' \xrightarrow{1} M} \exists_{N' \xrightarrow{1} N} (L \equiv M'N')$, или
 - b $\exists_{P \xrightarrow{1} P'} (M \equiv \lambda_x P \wedge L \equiv P'[x \mapsto N'])$

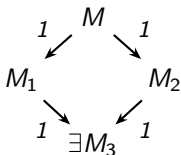
Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

- 1 $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
- 2 ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
- 3 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
- 4 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 7

$\xrightarrow{1}$ е \diamond , т.е.



Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

- 1 $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
- 2 ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
- 3 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
- 4 ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 8

$\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \xrightarrow{\beta}$, т.е.:

- ако $M \xrightarrow{\beta} N$, то $M \xrightarrow{1} N$, и
- ако $M \xrightarrow{1} N$, то $M \xrightarrow{\beta} N$.

Теорема на Church-Rosser

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна.

Доказателство.

$$(\xrightarrow{1})^{R,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T} = \xrightarrow{\beta} e \diamond.$$



Следствие 1

Ако $M \stackrel{\beta}{=} N$, то $\exists P (M \xrightarrow{\beta} P \xleftarrow{\beta} N)$.

Доказателство.

Индукция по $\stackrel{\beta}{=}$.



Следствия от теоремата на Church-Rosser

Следствие 2

Ако N е β -нормална форма на M , то $M \xrightarrow{\beta} N$.

Следствие 3

Всеки терм има най-много една β -нормална форма.

Следствие 4

λ -смятането е консистентно относно $\xrightarrow{\beta}$.

Доказателство.

Ако $M \not\equiv N$ са в нормална форма, то $M \not\xrightarrow{\beta} N$. □

Конфлуентност на η -редукцията

Лема 9

Ако $M \xrightarrow{\eta} M'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{\eta} M'[x \mapsto N]$.

Теорема

$\xrightarrow{\eta}$ е конфлуентна.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $M \xrightarrow{\eta} M_1$. □

Комутиращи редукции

Нека $D_1, D_2 \subseteq \Lambda^2$ са бинарни релации.

Дефиниция (комутиращи редукции)

Казваме, че D_1 и D_2 комутират, ако

$$\forall_{x,y,z} \left((x,y) \in D_1 \wedge (x,z) \in D_2 \rightarrow \exists_t ((y,t) \in D_2 \wedge (z,t) \in D_1) \right).$$

В частност, D е \diamond тогава и само тогава, когато комутира със себе си.

Лема 10 (Hindley-Rosen)

Ако D_1 и D_2 са \diamond и комутират, то $(D_1 \cup D_2)^{R,T}$ е \diamond .

Лема 11

Ако D_1 и D_2 комутират, то $D_1^{R,T}$ и $D_2^{R,T}$ също комутират.

Конфлуентност на $\beta\eta$ -редукцията

Лема 12

$\xrightarrow{\beta}$ комутира с $\xrightarrow{\eta}$

Доказателство.

Достатъчно е да видим, че $\xrightarrow{\beta}$ комутира с $\xrightarrow{\eta}$. □

Теорема (Конфлуентност на $\xrightarrow{\beta\eta}$)

$\xrightarrow{\beta\eta}$ е конфлуентна.

Следствие 5

Екстенционалното λ -смятане също е консистентно.