Нормализация и конфлуентност

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

26 март–9 април 2019 г.

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в (β-)нормална форма*, ако той не може да бъде (β-)редуциран, т.е. $\nexists_{N\in\Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в* (β-)*нормална форма*, ако той не може да бъде (β-)редуциран, т.е. $\nexists_{N\in\Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в (β-)нормална форма*, ако той не може да бъде (β-)редуциран, т.е. $\nexists_{N \in \Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма
- Ω, Y, Θ не са в нормална форма

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в (β-)нормална форма*, ако той не може да бъде (β-)редуциран, т.е. $\nexists_{N \in \Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма
- Ω, Y, Θ не са в нормална форма

Дефиниция

Казваме, че термът N е *(β-)нормална форма на терма M*, ако $M \overset{\beta}{=} N$ и N е в нормална форма.

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в* $(\beta$*-)нормална форма*, ако той не може да бъде $(\beta$-)редуциран, т.е. $\nexists_{N\in\Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма
- Ω, Y, Θ не са в нормална форма

Дефиниция

Казваме, че термът N е $(\beta$*-)нормална форма на терма* M, ако $M \overset{\beta}{=} N$ и N е в нормална форма. В такъв случай, казваме че термът M *има нормална форма*.

Нормални форми

Дефиниция

Казваме, че термът M *е в (β-)нормална форма*, ако той не може да бъде (β-)редуциран, т.е. $\nexists_{N \in \Lambda} M \xrightarrow{\beta} N$, отбелязваме $M \not\xrightarrow{\beta}$.

Примери:

- $K, K^*, I, S, c_n, \omega$ са в нормална форма
- Ω, Y, Θ не са в нормална форма

Дефиниция

Казваме, че термът N е *(β-)нормална форма на терма* M, ако $M \stackrel{\beta}{=} N$ и N е в нормална форма. В такъв случай, казваме че термът M *има нормална форма*.

Ако в допълнение $M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow N$, казваме че термът M е *нормализируем*.

Силна нормализируемост

Дефиниция (редукционна редица)

Крайна или безкрайна редица от термове $\{M_n\}$ наричаме *редукционна*, ако $M_{n-1} \xrightarrow{\beta} M_n$ за произволен индекс $n > 0$ от редицата.

Силна нормализируемост

Дефиниция (редукционна редица)

Крайна или безкрайна редица от термове $\{M_n\}$ наричаме *редукционна*, ако $M_{n-1} \xrightarrow{\beta} M_n$ за произволен индекс $n > 0$ от редицата.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако всяка редукционна редица, започваща с M, е крайна.

Силна нормализируемост

Дефиниция (редукционна редица)

Крайна или безкрайна редица от термове $\{M_n\}$ наричаме *редукционна*, ако $M_{n-1} \xrightarrow{\beta} M_n$ за произволен индекс $n > 0$ от редицата.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако всяка редукционна редица, започваща с M, е крайна.

Тривиални факти

- всеки терм в нормална форма е силно нормализируем

Силна нормализируемост

Дефиниция (редукционна редица)

Крайна или безкрайна редица от термове $\{M_n\}$ наричаме *редукционна*, ако $M_{n-1} \xrightarrow{\beta} M_n$ за произволен индекс $n > 0$ от редицата.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако всяка редукционна редица, започваща с M, е крайна.

Тривиални факти

- всеки терм в нормална форма е силно нормализируем
- всеки силно нормализируем терм е нормализируем

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?
- Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?
- Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?
- Има ли термове, които са нормализируеми, но не са силно нормализируеми?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?
- Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?
- Има ли термове, които са нормализируеми, но не са силно нормализируеми?
- Има ли стратегия за редукция, която винаги намира нормалната форма на нормализируем терм?

Въпроси за нормализируемост

- Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които не са нормализируеми?
- Има ли термове, които нямат нормална форма?
- Има ли термове с повече от една нормална форма?
- Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?
- Има ли термове, които са нормализируеми, но не са силно нормализируеми?
- Има ли стратегия за редукция, която винаги намира нормалната форма на нормализируем терм?
- Може ли алгоритмично да определим дали един терм е нормализируем?

Въпроси за нормализируемост

? • Има ли термове с нормална форма, които не са нормализируеми?

√ • Има ли термове, които не са нормализируеми?

? • Има ли термове, които нямат нормална форма?

? • Има ли термове с повече от една нормална форма?

✗ • Вярно ли е, че ако терм има единствена нормална форма, то всяка редица от редукции води до нея?

√ • Има ли термове, които са нормализируеми, но не са силно нормализируеми?

√ • Има ли стратегия за редукция, която винаги намира нормалната форма на нормализируем терм?

✗ • Може ли алгоритмично да определим дали един терм е нормализируем?

✗ • Може ли алгоритмично да определим дали един терм е силно нормализируем?

Редукционен граф

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна бинарна релация, която наричаме *редукция*.

Дефиниция (транзитивно покритие)

Транзитивно покритие на даден терм M относно релацията D наричаме множеството $V_D(M) := \left\{ N \mid (M, N) \in D^{\lambda,R,T} \right\}$.

Редукционен граф

$M \equiv \lambda_x M_1$

$M_1 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \cdots N_1$

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна бинарна релация, която наричаме *редукция*.

Дефиниция (транзитивно покритие)

Транзитивно покритие на даден терм M относно релацията D наричаме множеството $V_D(M) := \left\{N \mid (M, N) \in D^{\lambda,R,T}\right\}$. В частност за $D = \beta$, $V_\beta(M) := \left\{N \mid M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N\right\}$.

$(\ldots \square \ldots, \ldots \square \ldots)$

$V_\beta(\lambda_x X) = \{\lambda_x X\}$

$(\lambda_x M, \lambda_x N_1) \in D^{\lambda,R,T}$

$M \overset{D}{\twoheadrightarrow} \cdots N_1$

Редукционен граф

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна бинарна релация, която наричаме *редукция*.

Дефиниция (транзитивно покритие)

Транзитивно покритие на даден терм M относно релацията D наричаме множеството $V_D(M) := \{N \mid (M,N) \in D^{\lambda,R,T}\}$. В частност за $D = \beta$, $V_\beta(M) := \left\{N \mid M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N\right\}$.

Дефиниция (редукционен граф)

D-редукционен граф на терма M наричаме ориентирания граф $G_D(M) := \langle V_D(M), D^\lambda \rangle$.

Редукционен граф

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ е произволна бинарна релация, която наричаме *редукция*.

Дефиниция (транзитивно покритие)

Транзитивно покритие на даден терм M относно релацията D наричаме множеството $V_D(M) := \left\{N \mid (M, N) \in D^{\lambda,R,T}\right\}$. В частност за $D = \beta$, $V_\beta(M) := \left\{N \mid M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N\right\}$.

Дефиниция (редукционен граф)

D-редукционен граф на терма M наричаме ориентирания граф $G_D(M) := \left\langle V_D(M), D^\lambda \right\rangle$.

Всеки (краен или безкраен) път в графа $G_\beta(M)$ съответства еднозначно на редукционна редица.

Примери за редукционни графи

Да се построят β-редукционните графи на:

- S, K, I
- Ix, $I(Ix)$
- Ω, $KI\Omega$
- $\omega_3\omega_3$

$\omega_3 \equiv \lambda x.xxx$

Въпроси за редукционен граф

Каква е логическо-следствената връзка между следните твърдения:

- $G_\beta(M)$ е краен
- $G_\beta(M)$ е ацикличен
- M е нормализируем
- M е силно нормализируем

$\exists ?\, M \;\forall n$

$M \to_\beta \cdots\cdots M_n \not\to$

Свойство на диаманта

Дефиниция ($\diamond$)

Казваме, че дадена бинарна релация D *е диамантена* или *удовлетворява свойството* $\diamond$, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x, y) \in D \wedge (x, z) \in D \to \exists_t\big((y, t) \in D \wedge (z, t) \in D\big)\Big)$$

Свойство на диаманта

Дефиниция ($\diamond$)

Казваме, че дадена бинарна релация D *е диамантена* или *удовлетворява свойството* $\diamond$, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x,y) \in D \land (x,z) \in D \to \exists_t\big((y,t) \in D \land (z,t) \in D\big)\Big)$$

или представено графично:

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y \arrow[dr] & & z \arrow[dl] \\
 & \exists t &
\end{tikzcd}$$

Конфлуентност

Дефиниция (конфлуентност)

Казваме, че една релация D е конфлуентна, ако $D^{R,T}$ е $\diamond$.

Конфлуентност

Дефиниция (конфлуентност)

Казваме, че една релация D е конфлуентна, ако $D^{R,T}$ е $\diamond$.

Лема 1

Ако D е $\diamond$, то D е конфлуентна.

Конфлуентност

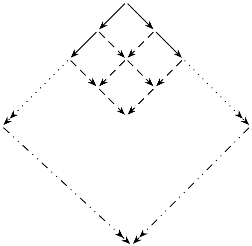
Дефиниция (конфлуентност)

Казваме, че една релация D е конфлуентна, ако $D^{R,T}$ е $\diamond$.

Лема 1

Ако D е $\diamond$, то D е конфлуентна.

Доказателство.



$\square$

Конфлуентност на β-редукцията

Теорема (Church-Rosser)

$\stackrel{\beta}{\rightarrow}$ *е конфлуентна, т.е.* $\stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *е* $\diamond$

Конфлуентност на β-редукцията

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна, т.е. $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ е $\diamond$ или:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
N \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & P \arrow[dl, two heads, "\beta"] \\
 & \exists Q &
\end{tikzcd}
$$

Конфлуентност на β-редукцията

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ *е конфлуентна, т.е.* $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *е* $\diamond$ *или:*

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dr, two heads, "\beta"] & \\
N \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & P \arrow[dl, two heads, "\beta"] \\
 & \exists Q &
\end{tikzcd}$$

Ще приведем доказателство на Tait и Martin-Löf.

Субституция и редукция

Лема 2

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ *е произволна редукция. Тогава ако* $(N, N') \in D^{\lambda,R,T}$*, то* $(M[x \mapsto N], M[x \mapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ *за произволен терм* $M \in \Lambda$*.*

Субституция и редукция

Лема 2

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ *е произволна редукция. Тогава ако* $(N, N') \in D^{\lambda,R,T}$*, то* $(M[x \mapsto N], M[x \mapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ *за произволен терм* $M \in \Lambda$*.*

Доказателство.

Индукция по дефиницията на субституция. $\square$

Субституция и редукция

Лема 2

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ *е произволна редукция. Тогава ако* $(N, N') \in D^{\lambda,R,T}$, *то* $(M[x \mapsto N], M[x \mapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ *за произволен терм* $M \in \Lambda$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на субституция. $\square$

Лема 3

Ако $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$, *то* $M[x \mapsto N] \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'[x \mapsto N]$ *за произволен терм* $N \in \Lambda$.

Субституция и редукция

Лема 2

Нека $D \subseteq \Lambda^2$ *е произволна редукция. Тогава ако* $(N, N') \in D^{\lambda,R,T}$, *то* $(M[x \mapsto N], M[x \mapsto N']) \in D^{\lambda,R,T}$ *за произволен терм* $M \in \Lambda$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на субституция. □

Лема 3

Ако $M \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} M'$, *то* $M[x \mapsto N] \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} M'[x \mapsto N]$ *за произволен терм* $N \in \Lambda$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $\stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow}$, с използване на Лемата за субституцията. □

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 4

Ако $N \xrightarrow{1} N'$, *то* $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 4

Ако $N \xrightarrow{1} N'$, *то* $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$

Доказателство.

Индукция по M. □

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 5

Ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$.

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 5

Ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$.

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $M \xrightarrow{1} M'$. □

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 6

1. *Ако* $\lambda_x M \xrightarrow{1} N$, *то* $\exists_{M' \xleftarrow{1} M}(N \equiv \lambda_x M')$
2. *Ако* $MN \xrightarrow{1} L$, *то*
   a. $\exists_{M' \xleftarrow{1} M} \exists_{N' \xleftarrow{1} N}(L \equiv M'N')$, *или*
   б. $\exists_{P \xrightarrow{1} P'}(M \equiv \lambda_x P \wedge L \equiv P'[x \mapsto N'])$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 7

$\xrightarrow{1}$ е $\diamond$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 7

$\xrightarrow{1}$ *е* $\diamond$, *т.е.*

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
M_1 \arrow[dr, "1"'] & & M_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists M_3 &
\end{tikzcd}
$$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 8

$\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

Редукция на една стъпка ($\xrightarrow{1}$)

Дефиниция

1. $M \xrightarrow{1} M$ за всяко $M \in \Lambda$
2. ако $M \xrightarrow{1} M'$, то $\lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x M'$
3. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4. ако $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Лема 8

$\left(\xrightarrow{\beta}\right)^{R,T} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \left(\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}\right)^{R,T} = \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$, *т.е.:*

$\left(\xrightarrow{1}\right)^{R,T} = \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

- *ако* $M \xrightarrow{\beta} N$, *то* $M \xrightarrow{1} N$, *и*
- *ако* $M \xrightarrow{1} N$, *то* $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

Теорема на Church-Rosser

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ *е конфлуентна.*

Теорема на Church-Rosser

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна.

Доказателство.

$(\xrightarrow{1})^{R,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T} = \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ е $\diamond$. $\square$

Теорема на Church-Rosser

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна.

Доказателство.

$(\xrightarrow{1})^{R,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T} = \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ е $\diamond$. $\square$

Следствие 1

Ако $M \overset{\beta}{=} N$, то $\exists_P(M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P \overset{\beta}{\twoheadleftarrow} N)$.

Теорема на Church-Rosser

Теорема (Church-Rosser)

$\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна.

Доказателство.

$(\xrightarrow{1})^{R,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T} = \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ е $\diamond$. □

Следствие 1

Ако $M \overset{\beta}{=} N$, то $\exists_P (M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P \overset{\beta}{\twoheadleftarrow} N)$.

Доказателство.

Индукция по $\overset{\beta}{=}$. □

Следствия от теоремата на Church-Rosser

Следствие 2

Ако N е β-нормална форма на M, то $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

Следствия от теоремата на Church-Rosser

Следствие 2

Ако N е β-нормална форма на M, то $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

Следствие 3

Всеки терм има най-много една β-нормална форма.

Следствия от теоремата на Church-Rosser

Следствие 2

Ако N е β-нормална форма на M, то $M \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

Следствие 3

Всеки терм има най-много една β-нормална форма.

Следствие 4

λ-смятането е консистентно относно $\stackrel{\beta}{=}$.

Следствия от теоремата на Church-Rosser

Следствие 2

Ако N е β-нормална форма на M, то $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

Следствие 3

Всеки терм има най-много една β-нормална форма.

Следствие 4

λ-смятането е консистентно относно $\overset{\beta}{=}$.

Доказателство.

Ако $M \not\equiv N$ са в нормална форма, то $M \overset{\beta}{\neq} N$. $\square$

Конфлуентност на η-редукцията

Лема 9

Ако $M \stackrel{\eta}{\twoheadrightarrow} M'$, *то* $M[x \mapsto N] \stackrel{\eta}{\twoheadrightarrow} M'[x \mapsto N]$.

Конфлуентност на η-редукцията

Лема 9

Ако $M \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'$, *то* $M[x \mapsto N] \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'[x \mapsto N]$.

Теорема

$\overset{\eta}{\rightarrow}$ *е конфлуентна.*

Конфлуентност на η-редукцията

Лема 9

Ако $M \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'$, *то* $M[x \mapsto N] \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'[x \mapsto N]$.

Теорема

$\overset{\eta}{\to}$ *е конфлуентна.*

Доказателство.

Индукция по дефиницията на $M \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} M_1$. $\square$

Комутиращи редукции

Нека $D_1, D_2 \subseteq \Lambda^2$ са бинарни релации.

Дефиниция (комутиращи редукции)

Казваме, че D_1 и D_2 комутират, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x,y) \in D_1 \land (x,z) \in D_2 \to \exists_t\big((y,t) \in D_2 \land (z,t) \in D_1\big)\Big).$$

Комутиращи редукции

Нека $D_1, D_2 \subseteq \Lambda^2$ са бинарни релации.

Дефиниция (комутиращи редукции)

Казваме, че D_1 и D_2 комутират, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x, y) \in D_1 \wedge (x, z) \in D_2 \to \exists_t\big((y, t) \in D_2 \wedge (z, t) \in D_1\big)\Big).$$

В частност, D е $\diamond$ тогава и само тогава, когато комутира със себе си.

Комутиращи редукции

Нека $D_1, D_2 \subseteq \Lambda^2$ са бинарни релации.

Дефиниция (комутиращи редукции)

Казваме, че D_1 и D_2 комутират, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x,y) \in D_1 \wedge (x,z) \in D_2 \to \exists_t\big((y,t) \in D_2 \wedge (z,t) \in D_1\big)\Big).$$

В частност, D е $\diamond$ тогава и само тогава, когато комутира със себе си.

Лема 10 (Hindley-Rosen)

Ако D_1 и D_2 са $\diamond$ и комутират, то $(D_1 \cup D_2)^{R,T}$ е $\diamond$.

Комутиращи редукции

Нека $D_1, D_2 \subseteq \Lambda^2$ са бинарни релации.

Дефиниция (комутиращи редукции)

Казваме, че D_1 и D_2 комутират, ако

$$\forall_{x,y,z}\Big((x,y) \in D_1 \wedge (x,z) \in D_2 \to \exists_t\big((y,t) \in D_2 \wedge (z,t) \in D_1\big)\Big).$$

В частност, D е $\diamond$ тогава и само тогава, когато комутира със себе си.

Лема 10 (Hindley-Rosen)

Ако D_1 и D_2 са $\diamond$ и комутират, то $(D_1 \cup D_2)^{R,T}$ е $\diamond$.

Лема 11

Ако D_1 и D_2 комутират, то $D_1^{R,T}$ и $D_2^{R,T}$ също комутират.

Конфлуентност на $\beta\eta$-редукцията

Лема 12

$\stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *комутира с* $\stackrel{\eta}{\twoheadrightarrow}$

Конфлуентност на $\beta\eta$-редукцията

Лема 12

$\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *комутира с* $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow}$

Доказателство.

Достатъчно е да видим, че $\overset{\beta}{\rightarrow}$ комутира с $\overset{\eta}{\rightarrow}$. $\square$

Конфлуентност на $\beta\eta$-редукцията

Лема 12

$\xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow$ *комутира с* $\xrightarrow{\eta}\!\!\!\!\rightarrow$

Доказателство.

Достатъчно е да видим, че $\xrightarrow{\beta}$ комутира с $\xrightarrow{\eta}$. $\square$

Теорема (Конфлуентност на $\xrightarrow{\beta\eta}$)

$\xrightarrow{\beta\eta}$ *е конфлуентна.*

Конфлуентност на $\beta\eta$-редукцията

Лема 12

$\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *комутира с* $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow}$

Доказателство.

Достатъчно е да видим, че $\xrightarrow{\beta}$ комутира с $\xrightarrow{\eta}$. $\square$

Теорема (Конфлуентност на $\xrightarrow{\beta\eta}$)

$\xrightarrow{\beta\eta}$ *е конфлуентна.*

Следствие 5

Екстенсионалното λ-смятане също е консистентно.