Типово λ-смятане

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

16–23 април 2019 г.

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Нека да си мислим за:

- типовете като класификация на термовете
- типовете като статични изисквания към динамично поведение
- типовата коректност като доказателство на теорема за отсъствие на грешки

Прости типове

Нека е дадено безкрайно изброимо множество TV от *типови променливи* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

Дефиниция (Типове)

Дефинираме множеството T от *прости типове*:

1. Ако $\alpha \in TV$, то $\alpha \in T$
   (базов тип)
2. Ако $\rho, \sigma \in T$, то $(\rho \Rightarrow \sigma) \in T$
   (функция с аргумент от тип ρ и резултат от тип σ)

Нотации:

- ще пропускаме най-външните скоби
- ще записваме $(\rho_1 \Rightarrow (\rho_2 \Rightarrow \ldots (\rho_n \Rightarrow \sigma) \ldots))$ съкратено като $\rho_1 \Rightarrow \rho_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \rho_n \Rightarrow \sigma$ или $\vec{\rho} \Rightarrow \sigma$.

Стилове типово λ-смятане

Два стила типово λ-смятане:

- *Curry* стил: имплицитно типизиране
  - закачаме удобен за нас и подходящ тип към термовете
- *Church* стил: експлицитно типизиране
  - типовете са неразделна част от термовете

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ-смятане като асоциираме типове с някои от термовете от Λ, когато това има смисъл.

Дефиниция (Типово съждение)

Ако $M \in \Lambda$ и $\tau \in T$, то $M : \tau$ наричаме *типово съждение*.

Интуиция:

- Ако $M : \rho \Rightarrow \sigma$ и $N : \rho$, то $MN : \sigma$
- Ако $x : \rho$ и $M : \sigma$, то $\lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma$

Какъв е типът на xy? Зависи!

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Дефиниция (Типов контекст)

Нека $x_1, \ldots, x_n \in V$ са различни променливи. Тогава множеството от декларации $\Gamma := \{x_1 : \tau_1, \ldots x_n : \tau_n\}$ наричаме *типов контекст*.
Дефинираме още:

- $\operatorname{dom}\Gamma := \{x_1, \ldots, x_n\}$
- $|\Gamma| := n$
- $(\Gamma, x : \tau) := \Gamma \cup \{x : \tau\}$, ако $x \notin \operatorname{dom}\Gamma$

Релация на типизиране

Дефиниция

Дефинираме индуктивно триместната релация $\Gamma \vdash M : \tau$, която четем като "M има тип τ в контекста Γ" с индукция по дефиницията на терма M:

1. Ако $x : \tau \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash x : \tau$
2. Ако $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$, то $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$
3. Ако $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma$

Ако $\emptyset \vdash M : \tau$, бележим накратко $\vdash M : \tau$ и казваме, че *термът M има тип τ*, а терма M наричаме *типизируем*.
Ако $\nexists_{\tau \in T} \vdash M : \tau$, то казваме, че M е *нетипизируем*.

Задача

Да се покажат подходящи типове за термовете I, K, K^*, S, c_n.

Типови правила

Можем да разгледаме клаузите дефиниращи релацията на типизиране като правила:

1. $$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$
2. $$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$
3. $$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

С всяко твърдение от вида $\Gamma \vdash M : \tau$ можем еднозначно да обвържем *дърво на построение* изградено чрез типовите правила.

В този синтактичен стил можем да изразим произволна индуктивна дефиниция, ако се интересуваме от последователните клаузи, приложени при получаване на съответното твърдение.

Лема за обръщането

Лема 1 (за обръщането)

1. *Ако* $\Gamma \vdash x : \tau$, *то* $x : \tau \in \Gamma$
2. *Ако* $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$, *то* $\exists_{\rho \in T}$ *такъв, че* $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ *и* $\Gamma \vdash M_2 : \rho$
3. *Ако* $\Gamma \vdash \lambda_x N : \tau$, *то* $x \notin \operatorname{dom} \Gamma$ *и* $\exists_{\rho, \sigma \in T}$ *такива, че* $\rho \Rightarrow \sigma \equiv \tau$ *и* $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$

Задача

Докажете, че $\omega \equiv \lambda_x xx$ *и* $\Omega \equiv \omega\omega$ *не са типизируеми.*

Свойства на типизирането

Твърдение 1 (монотонност)

Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ *и* $\Gamma \vdash M : \tau$, *то* $\Delta \vdash M : \tau$.

Твърдение 2 (определеност)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, *то* $\mathrm{FV}(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

Твърдение 3 (минималност)

Нека $\Gamma \restriction X := \{x : \tau \in \Gamma \mid x \in X\}$. *Ако* $\Gamma \vdash M : \tau$, *то* $\Gamma \restriction \mathrm{FV}(M) \vdash M : \tau$.

Твърдение 4 (типизируемост на подтермовете)

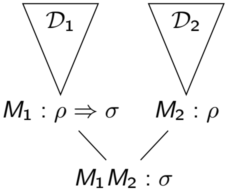
Ако $\Gamma \vdash M : \tau$ *и* $N \leq M$, *то* $\exists_{\Delta,\sigma}$ *такива, че* $\Delta \vdash N : \sigma$.

Типов извод

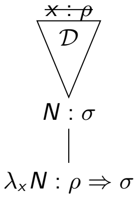
Дефиниция

Дефинираме индуктивно дървовидни структури от типови съждения с декларации по листата, които наричаме *типови изводи*:

1. всяка декларация $x : \tau$ е типов извод
2. ако $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ са типови изводи с корени $M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $M_2 : \rho$, то



   е типов извод
3. ако $\mathcal{D}$ е типов извод с корен $N : \sigma$, то



   е типов извод

Еквивалентност на типов извод и типизируемост

Типовият извод и релацията на типизиране са два различни стила, които са еквивалентни:

Твърдение 5

$\Gamma \vdash M : \tau$ *тогава и само тогава, когато съществува типов извод с корен* $M : \tau$, *чиито незадраскани листа са в* Γ *и съдържат само променливи от* $\mathrm{FV}(M)$.

Стилистична разлика: интересуваме ли се от контекста на всяка стъпка или не.

Типова субституция

Дефиниция

Всяка тотална функция $\xi : \mathit{TV} \to \mathit{T}$ наричаме *типова субституция*.
Субституцията $\iota(\alpha) := \alpha$ наричаме *идентитет*.
Дефинираме

$$[\alpha \mapsto \tau](\beta) := \begin{cases} \tau, & \text{ако } \alpha \equiv \beta, \\ \beta, & \text{ако } \alpha \not\equiv \beta. \end{cases}$$

Дефиниция

Нека ξ е типова субституция и $\tau \in \mathit{T}$. Дефинираме $\tau\xi$ — *резултата от прилагането на* ξ *върху* τ с индукция по τ:

1. $\alpha\xi := \xi(\alpha)$
2. $(\rho \Rightarrow \sigma)\xi := \rho\xi \Rightarrow \sigma\xi$

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Лема 2 (за субституцията)

- *Ако ξ е типова субституция и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma\xi \vdash M : \tau\xi$*
- *Ако $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$ и $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M[x \mapsto N] : \tau$*

Твърдение 6 (запазване на типа при редукция)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \xrightarrow{*} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$ за $* \in \{\beta, \eta\}$

Задача

Запазва ли се типът при експанзия? Доказателство или контрапример!

Най-общ тип

Дефиниция

Казваме, че σ е *по-общ от* τ или $\sigma \supseteq \tau$, ако има типова субституция ξ такава, че $\sigma\xi \equiv \tau$.

Задача

Докажете, че $\supseteq$ е частична преднаредба, т.е. рефлексивна и транзитивна.

Дефиниция (най-общ тип)

Казваме, че τ е *най-общ тип на терма M в контекста* Γ, ако

- $\Gamma \vdash M : \tau$
- ако $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\tau \supseteq \sigma$.

Задача

Покажете най-общ тип за $I, K, KI, K, S, SK, SKK, c_0, c_1, c_2$.*

Основни задачи на типовото λ-смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

1. **Дадено**: $M \in \Lambda, \tau \in T$, **търсим**: дали $\vdash M : \tau$
   (типова коректност, type checking, $\vdash M : \tau?$)
2. **Дадено**: $M \in \Lambda$, **търсим**: най-общ $\tau \in T$ такъв, че $\vdash M : \tau$
   (типово извеждане, type inference, $\vdash M : ?$)
3. **Дадено**: $\tau \in T$, **търсим**: комбинатор $M \in \Lambda$ такъв, че $\vdash M : \tau$
   (типова обитаемост, type inhabitance, $\vdash ? : \tau$)

- типовата коректност е еквивалентна на типовото извеждане
- и трите задачи са алгоритмично решими

Типизирани λ-термове

Основна идея: типовете са вградени в термовете.
Дефинираме *множеството от типизирани променливи* $V^T := \{x^\tau \mid x \in V, \tau \in T\}$. Множеството $S \subseteq V^T$ наричаме *съвместимо*, ако за всички $x^\sigma, y^\tau \in S$ е вярно, че ако $\sigma \not\equiv \tau$, то $x \not\equiv y$.

Дефиниция (типизирани λ-термове и свободните им променливи)

Дефинираме множеството от типизирани λ-термове Λ^T едновременно с функцията $\mathrm{FV} : \Lambda^T \to V^T$:

1. ако $x^\tau \in V^T$, то $x^\tau \in \Lambda^T$ и $\mathrm{FV}(x^\tau) := \{x^\tau\}$
2. ако $M^{\rho\Rightarrow\sigma}, N^\rho \in \Lambda$ и множеството $\mathrm{FV}(M^{\rho\Rightarrow\sigma}) \cup \mathrm{FV}(N^\rho)$ е съвместимо, то $(M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma \in \Lambda^T$ и $\mathrm{FV}\big((M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma\big) := \mathrm{FV}(M^{\rho\Rightarrow\sigma}) \cup \mathrm{FV}(N^\rho)$
3. ако $x^\rho \in V^T$ и $N^\sigma \in \Lambda$, то $(\lambda_{x^\rho} N^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda^T$ и $\mathrm{FV}\big((\lambda_{x^\rho} N^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma}\big) := \mathrm{FV}(N^\sigma) \setminus \{x^\rho\}$.

Нотации и конвенция

Нотация:

- ще изпускаме най-външните скоби
- ще считаме апликацията за дясноасоциативна и ще изпускаме съответните скоби
- ще обединяваме последователни абстракции
- ще пропускаме типовете, където се подразбират еднозначно, например:
  - $M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho}$ вместо $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma}$
  - $\lambda_{x^{\alpha}, y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} yx$ вместо $\left(\lambda_{x^{\alpha}} \left(\lambda_{y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} (y^{\alpha \Rightarrow \alpha} x^{\alpha})^{\alpha}\right)^{(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha}\right)^{\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha}$

За Λ^T можем аналогично на Λ:

- да се дефинира $\mathrm{BV}(M)$
- да се дефинира α-еквивалентност
- да се докаже, че е коректно да въведем конвенцията за променливите на Barendregt

Субституция на типизирани λ-термове

Дефиниция (Субституция на типизирани λ-термове)

Нека $M^\tau, N^\rho \in \Lambda^T$, $x^\rho \in V^T$ и $FV(M^\tau) \cup FV(N^\rho) \setminus \{x^\rho\}$ е съвместимо. Дефинираме $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho]$:

1. $x^\rho[x^\rho \mapsto N^\rho] := N^\rho$ (в случая е вярно, че $\rho \equiv \tau$)
2. $y^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := y^\tau$ за $y^\tau \not\equiv x^\rho$,
3. $(M_1^{\sigma\Rightarrow\tau} M_2^\sigma)^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := \left((M_1^{\sigma\Rightarrow\tau}[x^\rho \mapsto N^\rho])(M_2^\sigma[x^\rho \mapsto N^\rho])\right)^\tau$,
4. $(\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2})^{\tau_1\Rightarrow\tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho] := \left(\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho]\right)^{\tau_1\Rightarrow\tau_2}$

Лесно се вижда, че ако $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] \equiv P^\sigma$, то $\sigma \equiv \tau$.

Дефиниция (Прилагане на типова субституция)

Нека ξ е типова субституция и $M^\tau \in \Lambda^T$, дефинираме $M^\tau\xi$:

1. $x^\tau\xi := x^{\tau\xi}$
2. $(M_1^{\sigma\Rightarrow\tau} M_2^\sigma)^\tau\xi := \left((M_1^{\sigma\Rightarrow\tau}\xi)(M_2^\sigma\xi)\right)^{\tau\xi}$
3. $(\lambda_{y^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1\Rightarrow\tau_2}\xi := \left(\lambda_{y^{\tau_1\xi}} N^{\tau_2}\xi\right)^{\tau_1\xi\Rightarrow\tau_2\xi}$

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ-смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именованите термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ-затваряне, λ-съвместимост и λ-контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа
- дефинираме типизирани варианти на I, K, K^*, S
- дефинираме нормална форма, нормализируемост, силна нормализируемост, конфлуентност
- докажем конфлуентност на $\xrightarrow{\beta}$, $\xrightarrow{\eta}$ и $\xrightarrow{\beta\eta}$

Кои свойства на Λ **не можем** да пренесем директно в Λ^T?

Изтриване на типове

Дефиниция (Изтриване на типове)

Дефинираме функция $\|M\| : \Lambda^T \to \Lambda$, която изтрива типовете:

1. $\|x^\tau\| := x$,
2. $\|(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau\| := \|M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}\|\ \|M_2^\sigma\|$,
3. $\|(\lambda_{x^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}\| := \lambda_x \|N^{\tau_2}\|$.

Задача (Church $\to$ Curry)

Ако $M^\tau \in \Lambda^T$ *и* $\mathrm{FV}(M^\tau) = \{x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}\}$ *да се докаже, че* $\Gamma \vdash \|M^\tau\| : \tau$, *ако* $\Gamma := \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$

Задача (Curry $\to$ Church)

Ако $M \in \Lambda$ *и* $\Gamma \vdash M : \tau$, *да се намери терм* $N^\tau \in \Lambda^T$ *такъв, че* $\|N^\tau\| \equiv M$ *и* $\forall_{x^\sigma \in \mathrm{FV}(N^\tau)}\ x : \sigma \in \Gamma$.

Слабо типизирани термове

В практиката често се използва комбинация между стиловете на Church и Curry.

Дефиниция (слабо типизирани термове)

Дефинираме множеството от слабо типизирани термове Λ^{WT}:

1. ако $x \in V$, то $x \in \Lambda^{WT}$,
2. ако $M, N \in \Lambda^{WT}$, то $(MN) \in \Lambda^{WT}$,
3. ако $x \in V$, $\tau \in T$ и $N \in \Lambda^{WT}$, то $(\lambda_{x^\tau} N) \in \Lambda^{WT}$.

Уникалност на типизирането в Λ^{WT}

Разглеждаме следните правила за типов извод:

1. $$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$
2. $$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$
3. $$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_{x^\rho} N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Задача

Ако $M \in \Lambda^{WT}$ *и* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *и* $\Gamma \vdash M : \tau$, *то* $\sigma \equiv \tau$.

Задача

Да се формулира и докаже еквивалентността между Λ^{WT} *и* Λ^{T}.