Нормализация чрез оценяване

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

7–14 май 2019 г.

Затворени типове

Нека фиксираме непразно подмножество $TC \subseteq TV$ от типовите променливи, за елементите на които ще си мислим като *типови константи*.

Дефиниция (променливи на тип)

Дефинираме индуктивно множеството $VAR(\tau)$ от променливи на τ:

- $VAR(\alpha) := \{\alpha\}$
- $VAR(\rho \Rightarrow \sigma) := VAR(\rho) \cup VAR(\sigma)$.

Свободните променливи на тип τ бележим с $\mathrm{FV}(\tau) := VAR(\tau) \setminus TC$.

Дефиниция (затворен тип)

Ще казваме, че типът τ е *затворен*, ако $\mathrm{FV}(\tau) = \emptyset$, т.е. $VAR(\tau) \subseteq TC$.

- множеството от затворените типове ще бележим $\overline{T}$
- множеството от променливите със затворен тип ще бележим с $V^{\overline{T}}$

Термове от затворен тип

Дефиниция

Дефинираме индуктивно множеството $\Lambda^{\overline{T}}$ от *термове от затворен тип*:

1. ако $x^\tau \in V^{\overline{T}}$, то $x^\tau \in \Lambda^{\overline{T}}$,
2. ако $M^{\rho\Rightarrow\sigma}, N^\rho \in \Lambda^{\overline{T}}$ и множеството $\mathrm{FV}(M^{\rho\Rightarrow\sigma}) \cup \mathrm{FV}(N^\rho)$ е съвместимо, то $(M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma \in \Lambda^{\overline{T}}$,
3. ако $x^\rho \in V^{\overline{T}}$ и $N^\sigma \in \Lambda^{\overline{T}}$, то $(\lambda_{x^\rho} N^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda^{\overline{T}}$.

Бележим:

- $\overline{\Lambda^{T}} := \left\{M \in \Lambda^{\overline{T}} \mid \mathrm{FV}(M) = \emptyset\right\}$
- $V^\tau := \left\{x^\tau \in V^{\overline{T}}\right\}$
- $\Lambda^\tau := \left\{M^\tau \in \Lambda^{\overline{T}}\right\}$
- $\overline{\Lambda^\tau} := \left\{M^\tau \in \overline{\Lambda^{T}}\right\}$

λ-интерпретации

Дефиниция (λ-интерпретация)

λ-интерпретация (на типовото λ-смятане) наричаме наредена тройка $\langle \mathcal{D}, [\![\cdot]\!], ap \rangle$, където:

1. $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\tau\}_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}}$ е фамилия от носители за затворените типове,
2. $[\![\cdot]\!] = \left\{[\![\cdot]\!]^\tau : \overline{\Lambda^\tau} \to \mathcal{D}_\tau\right\}_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}}$ е фамилия от изображения, съпоставяща на всеки затворен терм елемент от носителя за съответния затворен тип,
3. $ap = \{ap_{\rho,\sigma} : \mathcal{D}_{\rho \Rightarrow \sigma} \times \mathcal{D}_\rho \to \mathcal{D}_\sigma\}_{\rho,\sigma \in \overline{\mathcal{T}}}$ е фамилия от изображения, дефиниращи апликация на функционален тип над аргумент.

За удобство ще бележим $[\![\tau]\!] := \mathcal{D}_\tau$ и съответно λ-интерпретацията ще записваме като наредена двойка $\langle [\![\cdot]\!], ap \rangle$.

Ще изпускаме типовите индекси на фамилиите, когато те се подразбират от контекста.

λ-модели

Дефиниция (λ-модел)

λ-интерпретация $\langle [\![\cdot]\!], ap \rangle$, за която е изпълнено:

$$\forall_{M^\tau, N^\tau \in \overline{\Lambda^T}} (M^\tau \stackrel{\beta\eta}{=} N^\tau \to [\![M^\tau]\!] = [\![N^\tau]\!])$$

и

$$\forall_{M^{\rho\Rightarrow\sigma}, N^\rho \in \overline{\Lambda^T}} \left([\![M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho]\!] = ap_{\rho,\sigma}([\![M^{\rho\Rightarrow\sigma}]\!], [\![N^\rho]\!])\right),$$

наричаме λ-модел (на типовото λ-смятане).

Пример: $[\![\tau]\!] := \{0\}$, $[\![M^\tau]\!] := 0, ap(0,0) := 0$ е пример за тривиален λ-модел.

Теоретико-множествена интерпретация

Дефиниция (теоретико-множествена интерпретация на типовете)

Нека е дадена фамилия от множества $\langle \mathcal{D}_\mu \rangle_{\mu \in TC}$. Разглеждаме *теоретико-множествената интерпретация на типовете* дефинирана като следната фамилия от носители:

- $[\![\mu]\!] := \mathcal{D}_\mu$
- $[\![\rho \Rightarrow \sigma]\!] := [\![\sigma]\!]^{[\![\rho]\!]} := \{f : [\![\rho]\!] \to [\![\sigma]\!]\}$

Дефиниция (теоретико-множествена апликация)

Дефинираме фамилията от изображения:

$$ap_{\rho,\sigma}(f, x) := f(x), \text{ където } x \in [\![\rho]\!], f : [\![\rho]\!] \to [\![\sigma]\!].$$

Стойност при оценка

Дефиниция (λ-оценка)

Нека е дадена λ-интерпретация на типовете. Фамилията от функции $\xi := \{\xi_\tau\}_{\tau \in \mathcal{T}}$, за които $\xi_\tau : V^\tau \to [\![\tau]\!]$ наричаме *λ-оценка*.

Дефиниция (стойност при оценка)

Нека ξ е λ-оценка в теоретико-множествената интерпретация на типовете. Дефинираме индуктивно $[\![M^\tau]\!]_\xi \in [\![\tau]\!]$ (*стойност на терма M^τ при оценка ξ*):

- $[\![x]\!]_\xi := \xi(x)$,
- $[\![M_1 M_2]\!]_\xi := [\![M_1]\!]_\xi([\![M_2]\!]_\xi)$,
- $[\![\lambda_{x^\rho} N^\sigma]\!]_\xi := f : [\![\rho]\!] \to [\![\sigma]\!]$, където $f(a) := [\![N]\!]_{\xi^a_x}$.

Теоретико-множествен модел

Задача

Покажете, че ако $\xi(x) = \nu(x)$ за всяко $x \in \mathsf{FV}(M)$, то $[\![M]\!]_\xi = [\![M]\!]_\nu$.

Следствие 1

Затворените термове $M \in \overline{\Lambda^T}$ имат еднаква стойност $[\![M]\!]$ при всички оценки, която наричаме тяхна теоретико-множествена интерпретация.

Задача

Покажете, че теоретико-множествената интерпретация е λ-модел.

Доказателство.

Индукция по $\stackrel{\beta\eta}{=}$, с доказване на помощна Лема за субституцията:

$$[\![M[x \mapsto N]]\!]_\xi = [\![M]\!]_{\xi_x^{[\![N]\!]_\xi}}.$$

η-дълга нормална форма

Дефиниция (η-дълга нормална форма на терм)

Нека $M^\tau \in NF$ е терм в β-нормална форма. Дефинираме $Inf(M^\tau)$ с едновременна индукция по $M \in NF$ и τ:

- ако $M \equiv x\vec{N}$, нека $N_i' := Inf(N_i)$:
  - ако $\tau \equiv \alpha$, то $Inf(x\vec{N}) := x\vec{N}'$,
  - ако $\tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$, то $Inf(x\vec{N}) := \lambda_{y^\rho} Inf\left(x\vec{N}'\, Inf(y)\right)$ за свежа $y^\rho \in V^T$,
- ако $M \equiv \lambda_x N$, то $Inf(\lambda_x N) := \lambda_x Inf(N)$.

Задача

Покажете, че $Inf : NF \to NF$, т.е. Inf запазва β-нормалната форма.

По Теоремата за силната нормализация всеки терм M има единствена нормална форма $nf(M)$. Можем да разширим функцията $Inf : \Lambda^T \to NF$ като дефинираме $Inf(M) := Inf(nf(M))$.

Дълга нормална форма — примери

Да се пресметнат дългите нормални форми на:

- $x^{\alpha \Rightarrow \beta}$
- $c_1^{(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha} \equiv \lambda_{f^{\alpha \Rightarrow \alpha}, x^{\alpha}} fx$
- $\lambda_{x^{\alpha \Rightarrow \alpha}, n^{(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha}, z^{\alpha}} nx(x(nxz))$

Дефиниция (Индуктивна дефиниция на термове в дълга нормална форма)

Дефинираме множеството $LNF \subseteq \Lambda^T$

1. ако $x \in V^T$, $\vec{M} \in LNF$ и $(x\vec{M})^{\alpha}$, то $x\vec{M} \in LNF$,
2. ако $M \in LNF$, то $\lambda_x M \in LNF$.

Задача

$LNF = \{M \in \Lambda^T \mid lnf(M) \equiv M\}$

Идея на нормализацията чрез оценяване

Идея за алгоритъм за нормализация:

1. Избираме подходящ λ-модел с обратима интерпретация, т.е. по стойност да можем да получим съответен терм
2. в λ-модела по дефиниция всички $\beta\eta$-еквивалентни термове имат една и съща стойност
3. дефинираме обратна функция на $[\![\cdot]\!]$, която по дефиниция връща термове в дълга нормална форма
4. вземаме интерпретацията на даден терм M и прилагаме обратната функция
5. съгласно 2 и Теоремата на Church-Rosser, полученият терм е единствената дълга нормална форма на първоначалния терм

Кой λ-модел да изберем?

Идея: да интерпретираме термовете като самите тях!

Разглеждаме теоретико-множествения модел породен от множествата от термове $\{\Lambda^\mu\}_{\mu \in TC}$.

Отражение и реификация

Ще дефинираме две фамилии изображения:

- $\Uparrow_\tau\colon \Lambda^\tau \to [\![\tau]\!]$ — *отражение* на термовете (синтаксис) като стойности (семантика)
- $\Downarrow_\tau\colon [\![\tau]\!] \to \Lambda^\tau$ — *реификация* на стойностите (семантика) като термове (синтаксис)

Дефиниция (Отражение и реификация)

Едновременно дефинираме с индукция по типа τ:

- $\Uparrow_\mu (M) := M$,
- $\Uparrow_{\rho\Rightarrow\sigma} (M)(a) := \Uparrow_\sigma (M \Downarrow_\rho (a))$,
- $\Downarrow_\mu (M) := M$,
- $\Downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma} (a) := \lambda_{x^\rho} \Downarrow_\sigma (a(\Uparrow_\rho x))$, където x^ρ е свежа променлива.

Коректност на нормализацията чрез оценяване

Лема 1

$\Uparrow_{\vec{\rho}\Rightarrow\sigma}(M)(a_1)(a_2)\ldots(a_n) := \Uparrow_\sigma (M \Downarrow_{\rho_1}(a_1)\Downarrow_{\rho_2}(a_2)\ldots\Downarrow_{\rho_n}(a_n)).$

Доказателство.

Индукция по n. $\square$

Теорема (Коректност на нормализацията чрез оценяване)

$\Downarrow([\![M]\!]_{\Uparrow}) \equiv \mathit{lnf}(M).$

Доказателство.

Достатъчно да докажем твърдението за M в дълга нормална форма.
Индукция по $M \in LNF$ и използваме Лема 1. $\square$

Избор на свежа променлива

- **Проблем:** как да си изберем "свежа" променлива при дефиницията на $\Downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}$?
- Аналогичен проблем имаме при дефиницията на *Inf*.
- Проблемът не е формален: заради конвенцията лесно можем да проверим, че дефинициите не зависят от избора на променливата.
- Проблемът е по-скоро имплементационен и практически.
- **Решение:** да използваме безименни термове!

Задача

Да се дефинира $\mathit{Inf} : \Lambda^{T*} \to \mathit{NF}^*$ *за безименни термове.*

Параметризация по индекси

$$\Downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}(a) := \lambda_{x^\rho} \Downarrow_\sigma (a(\Uparrow_\rho x))$$

- **Проблем:** с какво число да заместим x в дефиницията на $\Downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}$?
- Зависи под колко λ се намираме! Трябва да помним колко λ "навътре" сме влезли
- Разглеждаме *термови семейства*, представляващи редица от термове $M_0, M_1, \ldots$, различаващи се единствено по индексите на de Bruijn на свободните си променливи
- **Интуиция:** $M_n := \uparrow^n (M)$ за фиксиран M.

Термови семейства

Разглеждаме теоретико-множествения модел породен от множествата $\{\mathbb{N} \multimap\!\!\!\rightarrow \Lambda^{*\mu}\}_{\mu \in TC}$, т.е. носителите са термови семейства от базов тип.

Дефиниция (k-та променлива)

Дефинираме термовото семейство от променливи $x_k^\tau : \mathbb{N} \multimap\!\!\!\rightarrow \overline{V^{\tau *}}$ чрез $x_k^\tau(l) := (l-k)^\tau$ (недефинирано за $l < k$).

Интуиция:

- За $k \geq 0$ — променлива свързана с k-тата отвън навътре λ — ако е скрита зад l на брой λ, номерът ѝ трябва да е $l - k$
- За $k < 0$ — свободна променлива с индекс на de Bruijn $(-k)$ — ако е скрита зад l на брой λ, номерът ѝ трябва да е $\uparrow^l (-k) = l - k$

Дефиниция (апликация на термови семейства)

$(m_1 m_2)(k) := m_1(k) m_2(k)$. **Интуиция:** не се добавят λ.

Оценка и дълга нормална форма за безименни термове

Дефиниция (модифицирана оценка на безименните термове)

Нека $\xi = \left\{\xi_\tau : \overline{V^{\tau *}} \to [\![\tau]\!]\right\}_{\tau \in \overline{T}}$ е λ^*-оценка и $a = \left\{a_\tau \in [\![\tau]\!]\right\}_{\tau \in \overline{T}}$.
Дефинираме модифицираната субституция ξ^a както следва:

$$\xi^a_\tau(i^\tau) := \begin{cases} a_\tau, & \text{ако } i = 0, \\ \xi_\tau\left((i-1)^\tau\right), & \text{ако } i > 0. \end{cases}$$

Дефиниция (стойност на безименни термове при оценка)

За λ^*-оценка ξ дефинираме индуктивно $[\![M^\tau]\!]_\xi \in [\![\tau]\!]$ (*стойност на терма M^τ при оценка ξ*):

- $[\![i]\!]_\xi := \xi(i)$,
- $[\![M_1 M_2]\!]_\xi := [\![M_1]\!]_\xi([\![M_2]\!]_\xi)$,
- $[\![\lambda_\rho N^\sigma]\!]_\xi := f : [\![\rho]\!] \to [\![\sigma]\!]$, където $f(a) := [\![N]\!]_{\xi^a}$.

Отражение и реификация за термови семейства

Отново ще дефинираме две фамилии изображения:

- $\Uparrow_\tau \colon (\mathbb{N} \multimap \Lambda^{*\tau}) \to [\![\tau]\!]$ — *отражение* на термовите семейства (синтаксис) като стойности (семантика)
- $\Downarrow_\tau \colon [\![\tau]\!] \to \mathbb{N} \multimap \Lambda^{*\tau}$ — *реификация* на стойностите (семантика) като термови семейства (синтаксис)

Дефиниция (Отражение и реификация)

Едновременно дефинираме с индукция по типа τ:

- $\Uparrow_\mu (m) := m$,
- $\Uparrow_{\rho\Rightarrow\sigma} (m)(a) := \Uparrow_\sigma (m \Downarrow_\rho (a))$,
- $\Downarrow_\mu (m) := m$,
- $\Downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma} (a)(n) := \lambda \Downarrow_\sigma (a(\Uparrow_\rho x_{n+1}))(n+1)$.

Коректност на нормализацията чрез оценяване за термови семейства

Лема 2

$\Uparrow_{\vec{\rho}\Rightarrow\sigma} (m)(a_1)(a_2)\ldots(a_n) := \Uparrow_\sigma (m \Downarrow_{\rho_1} (a_1) \Downarrow_{\rho_2} (a_2) \ldots \Downarrow_{\rho_n} (a_n))$.

Дефиниция

Разглеждаме фамилията от оценки $\xi_l(k) := \Uparrow x_{l-k}$.

Теорема (Коректност на нормализацията чрез оценяване за термови семейства)

$\Downarrow ([\![M]\!]_{\xi_l})(l) \equiv \mathit{lnf}(M)$ *за* $M \in \overline{\Lambda^{T*}}$.

Следствие 2

$\Downarrow ([\![M]\!])(l) \equiv \mathit{lnf}(M)$ *за затворен терм* $M \in \overline{\Lambda^{T*}}$ *и произволно* $l \in \mathbb{N}$.

Нормализация чрез оценяване за Λ

Идеята за нормализация чрез оценяване може да се приложи и за безтиповото λ-смятане, но коректността се доказва с други средства.
Идея: разглеждаме носител D за който е изпълнено, че $D = \Lambda + [D \to D]$, където $+$ е директна сума на множества, а $[D \to D]$ са изчислимите функции от D в D.
Тогава дефинираме рекурсивно реификацията $\Downarrow : D \to \Lambda$:

$$\Downarrow f := \begin{cases} f, \text{ ако } f \in \Lambda, \\ \lambda_x \Downarrow f(x), \text{ ако } f \in [D \to D] \text{ и } x \text{ — свежо.} \end{cases}$$

Разглеждаме оценка $\xi : V \to D$ и дефинираме $[\![M]\!]_\xi \in D$:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_\xi &:= \xi(x) \\ [\![M_1 M_2]\!]_\xi &:= \begin{cases} [\![M_1]\!]_\xi(\Downarrow [\![M_2]\!]_\xi), & \text{ако } [\![M_1]\!]_\xi \in \Lambda, \\ [\![M_1]\!]_\xi([\![M_2]\!]_\xi), & \text{ако } [\![M_1]\!]_\xi \in [D \to D], \end{cases} \\ [\![\lambda_x N]\!]_\xi(d) &:= [\![N]\!]_{\xi_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{d}}}. \end{aligned}$$

Оценяването прави “лениво” отражение.