1 Мощности

Казваме, че едно множество A е *изброимо безкрайно*, ако съществува биекция от A въху $\mathbb{N}$.

Казваме, че едно множество A е *неизброимо безкрайно*, ако A е безкрайно и **не** съществува биекция от A въху $\mathbb{N}$.

Определение 1. *Две множества A и B са равномощни, $|A| = |B|$, ако съществува биекция от A върху B.*

Теорема 1. *Нека A е множество и $\mathscr{P}(A)$ е множеството от всички подмножества на A. Докажете, че $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.*

Теорема 2 (Кантор-Шрьодер-Бернщайн)**.** *Ако $|A| \leq |B|$ & $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.*

Теорема 3. *Нека $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, където множествата A_i са изброими и индексното множество I е изброимо. Тогава A е изброимо множество.*

Следствие 1. *Ако A е крайна или изброимо безкрайна азбука, то A^* е изброимо безкрайно.*

Задача 1. *Множеството $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ е равномощно с това на затворения интервал от реални числа $[0, 1]$.*

Задача 2. *Докажете, че отвореният интервал от реални числа $(0, 1)$ е неизброимо множество.*

Задача 3. *Докажете, че множеството ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизброимо.*

Задача 4. *Нека A е крайна азбука. Докажете, че :*

1) *A^* е изброимо множество.*

2) *$\mathscr{P}(A^*)$ е неизброимо безкрайно.*

Задача 5. *Докажете, че следните множества са изброимо безкрайни.*

1) *B е множеството от тези думи над азбуката $\{0, 1\}$, които не започват с 0, с изключение на думата 0, т.е. $B = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$.*

2) *$F(\mathbb{N})$ е множеството от всички крайни подмножества от естествени числа.*

3) *$F(A^*)$ е множеството от всички крайни подмножества от A^*, за произволна азбука A.*

Задача 6. *Докажете, че :*

1. *ако $g : A \to B$ е сюрекция, то $|A| \geq |B|$;*
2. *множествата $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ са изброимо безкрайни;*
3. *съвкупността от всички полиноми на една променлива с цели коефициенти е изброимо безкрайно множество.*
4. *Съвкупността $\mathscr{K}$ от всички реални алгебрични числа (т.е. корени на полиноми с цели коефициенти) е изброима.*

Задача 7. *Докажете, че множеството от изброимо безкрайни последователности от естествени числа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ е равномощно на $\mathbb{R}$.*

Задача 8. *Докажете, че следните множества са равномощни:*

а) *$\mathbb{R}$;*

б) *интервалът от реални числа $(0, 1)$;*

в) *интервалът от реални числа $[0, 1]$;*

г) интервалът от реални числа (a, b)*, за* $a < b$.

д) $\mathscr{P}(\mathbb{N})$;

е) ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f \ \mid \ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.

ж) ${}^{\mathbb{N}}2 = \{f \ \mid \ f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$

Задача 9. *Нека* $|A_1| = |A_2|$ *и* $|B_1| = |B_2|$*. Докажете, че* $|\{f \mid f : A_1 \to B_1\}| = |f \mid f : A_2 \to B_2|$.