Съответствие на Curry-Howard

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

21–28 май 2019 г.

Интерпретация на Brouwer-Heyting-Kolmogorov

В интуиционистката (конструктивната) логика можем да разглеждаме доказателствата като конструкции.

Доказателство на

1. $A \land B$ е комбинация от доказателства на A и B

Интерпретация на Brouwer-Heyting-Kolmogorov

В интуиционистката (конструктивната) логика можем да разглеждаме доказателствата като конструкции.

Доказателство на

1. $A \wedge B$ е комбинация от доказателства на A и B
2. $A \vee B$ е доказателство на A или на B с етикет a или b

Интерпретация на Brouwer-Heyting-Kolmogorov

В интуиционисткатa (конструктивната) логика можем да разглеждаме доказателствата като конструкции.

Доказателство на

1. $A \land B$ е комбинация от доказателства на A и B
2. $A \lor B$ е доказателство на A или на B с етикет a или b
3. $A \to B$ е конструкция, която по доказателство на A дава доказателство на B

Интерпретация на Brouwer-Heyting-Kolmogorov

В интуиционистката (конструктивната) логика можем да разглеждаме доказателствата като конструкции.

Доказателство на

1. $A \wedge B$ е комбинация от доказателства на A и B
2. $A \vee B$ е доказателство на A или на B с етикет a или b
3. $A \to B$ е конструкция, която по доказателство на A дава доказателство на B
4. $\forall_x A$ е конструкция, която по елемент x дава доказателство на $A(x)$

Интерпретация на Brouwer-Heyting-Kolmogorov

В интуиционисткаta (конструктивната) логика можем да разглеждаме доказателствата като конструкции.

Доказателство на

1. $A \wedge B$ е комбинация от доказателства на A и B
2. $A \vee B$ е доказателство на A или на B с етикет a или b
3. $A \to B$ е конструкция, която по доказателство на A дава доказателство на B
4. $\forall_x A$ е конструкция, която по елемент x дава доказателство на $A(x)$
5. $\exists_x A$ е комбинация от елемент x и доказателство на $A(x)$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \land B$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	фамилия от базови типове $\{\mu_x\}$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	фамилия от базови типове $\{\mu_x\}$
$\forall_x A$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \land B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \lor B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	фамилия от базови типове $\{\mu_x\}$
$\forall_x A$	фамилия от типове $\{\rho_x\}$

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	фамилия от базови типове $\{\mu_x\}$
$\forall_x A$	фамилия от типове $\{\rho_x\}$
$\exists_x A$	

Формулите като типове

Можем да си мислим за формулите като за типове!

формула	тип
$A \to B$	$\rho \Rightarrow \sigma$
$A \wedge B$	$\rho \otimes \sigma$
$A \vee B$	$\rho \oplus \sigma$
съждителни променливи	типови променливи
$A[P \mapsto B]$	$\rho[\alpha \mapsto \sigma]$
атомарна формула $p\,x$	фамилия от базови типове $\{\mu_x\}$
$\forall_x A$	фамилия от типове $\{\rho_x\}$
$\exists_x A$	елемент на фамилия от типове ρ_x

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\to^- \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \to B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B}$	

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \to B \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mid N \\ A \end{matrix}}{B} \to^-$	апликация $(M^{A \to B} N^{A})^{B}$

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B}$$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^{A})^{B}$
$$\rightarrow^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ u$$	

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^- \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B}$$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^A)^B$
$$\rightarrow^+ \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\, u$$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \rightarrow B}$

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^- \frac{\overset{\vert\, M}{A \to B} \qquad \overset{\vert\, N}{A}}{B}$$	апликация $(M^{A\to B} N^A)^B$
$$\rightarrow^+ \frac{\overset{\cancel{[A^u]}}{\overset{\vert\, M}{B}}}{A \to B}\, u$$ етикет u на допускане A	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B}$

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\to^- \frac{\overset{\vdots\, M}{A \to B} \qquad \overset{\vdots\, N}{A}}{B}$$	апликация $(M^{A\to B} N^A)^B$
$$\to^+ \frac{\overset{\cancel{[A^u]}}{\overset{\vdots\, M}{B}}}{A \to B}\, u$$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\rightarrow^- \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B}$	апликация $(M^{A\rightarrow B} N^A)^B$
$\rightarrow^+ \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\, u$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A\rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B}$$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^{A})^{B}$
$$\rightarrow^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ u$$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^{B})^{A \rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\dfrac{\begin{matrix} \vdots M & \vdots N \\ A \to B & A \end{matrix}}{B} \to^-$	апликация $(M^{A \to B} N^A)^B$
$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{[A^u]} \\ \vdots M \\ B \end{matrix}}{A \to B} \to^+ u$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
$\mathrm{FA}(M)$	

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^{-}\ \dfrac{\overset{\vert\ M}{A \rightarrow B} \qquad \overset{\vert\ N}{A}}{B}$$	апликация $(M^{A\rightarrow B} N^{A})^{B}$
$$\rightarrow^{+}\ \dfrac{\overset{\cancel{[A^u]}}{\overset{\vert\ M}{B}}}{A \rightarrow B}\, u$$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^{B})^{A\rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
$\mathrm{FA}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$$\rightarrow^{-}\ \dfrac{\begin{matrix}\mid M \\ A \rightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mid N \\ A\end{matrix}}{B}$$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^{A})^{B}$
$$\rightarrow^{+}\ \dfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^{u}]} \\ \mid M \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}\ u$$	абстракция $(\lambda_{u^{A}} M^{B})^{A \rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
$\mathrm{FA}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$
доказателство без свободни допускания	

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\rightarrow^- \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \rightarrow B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vert\, N \\ A \end{matrix}}{B}$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^A)^B$
$\rightarrow^+ \dfrac{\begin{matrix} \cancel{[A^u]} \\ \vert\, M \\ B \end{matrix}}{A \rightarrow B}\, u$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
FA(M)	FV(M)
доказателство без свободни допускания	затворен терм

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\rightarrow^- \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \rightarrow B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vert\, N \\ A \end{matrix}}{B}$	апликация $(M^{A \rightarrow B} N^A)^B$
$\begin{matrix} \cancel{[A^u]} \\ \vert\, M \end{matrix}$ $\rightarrow^+ \dfrac{B}{A \rightarrow B}\, u$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
$\mathrm{FA}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$
доказателство без свободни допускания	затворен терм
аксиома	

Доказателствата като програми

Доказателство на формула като за типизиран терм

доказателство	λ-терм
$\rightarrow^- \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A\rightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mid N\\ A\end{matrix}}{B}$	апликация $(M^{A\rightarrow B}N^A)^B$
$\rightarrow^+ \dfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{matrix}}{A\rightarrow B}\,u$	абстракция $(\lambda_{u^A} M^B)^{A\rightarrow B}$
етикет u на допускане A	променлива u от тип A
задраскано допускане	свързана променлива
$\mathrm{FA}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$
доказателство без свободни допускания	затворен терм
аксиома	константа

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$	

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$	наредена двойка $\left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A \wedge B}$

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$	наредена двойка $\langle M^A, N^B \rangle^{A \wedge B}$
$$\wedge^-_0 \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \wedge B \end{array}}{A}$$	

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$$\wedge^+ \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vert\, N \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$$	наредена двойка $\langle M^A, N^B \rangle^{A\wedge B}$
$$\wedge_0^- \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \wedge B \end{matrix}}{A}$$	лява проекция $(M^{A\wedge B}{}_\llcorner)^A$

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$$\wedge^+ \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vert\, N \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$$	наредена двойка $\left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A \wedge B}$
$$\wedge_0^- \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \wedge B \end{matrix}}{A}$$	лява проекция $(M^{A \wedge B}\llcorner)^A$
$$\wedge_1^- \dfrac{\begin{matrix} \vert\, M \\ A \wedge B \end{matrix}}{B}$$	

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$\wedge^+ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ B \end{array}}{A \wedge B}$	наредена двойка $\langle M^A, N^B \rangle^{A \wedge B}$
$\wedge^-_0 \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \wedge B \end{array}}{A}$	лява проекция $(M^{A \wedge B} \llcorner)^A$
$\wedge^-_1 \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \wedge B \end{array}}{B}$	дясна проекция $(M^{A \wedge B} \lrcorner)^B$

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$\wedge^+ \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mid N \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$	наредена двойка $\langle M^A, N^B \rangle^{A \wedge B}$
$\wedge_0^- \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \wedge B \end{matrix}}{A}$	лява проекция $(M^{A \wedge B}\llcorner)^A$
$\wedge_1^- \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \wedge B \end{matrix}}{B}$	дясна проекция $(M^{A \wedge B}\lrcorner)^B$
разглеждане на случаи	

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$\wedge^+ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ B\end{array}}{A \wedge B}$	наредена двойка $\left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A\wedge B}$
$\wedge^-_0 \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A \wedge B\end{array}}{A}$	лява проекция $(M^{A\wedge B}\llcorner)^A$
$\wedge^-_1 \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A \wedge B\end{array}}{B}$	дясна проекция $(M^{A\wedge B}\lrcorner)^B$
разглеждане на случаи	разклонение (Cases)

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$\wedge^+\ \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\mid N\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}$	наредена двойка $\langle M^A, N^B\rangle^{A\wedge B}$
$\wedge^-_0\ \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}$	лява проекция $(M^{A\wedge B}\llcorner)^A$
$\wedge^-_1\ \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}$	дясна проекция $(M^{A\wedge B}\lrcorner)^B$
разглеждане на случаи	разклонение (Cases)
индукция	

Доказателствата като програми (2)

доказателство	λ-терм
$\wedge^+ \dfrac{\overset{\vert\, M}{A} \qquad \overset{\vert\, N}{B}}{A \wedge B}$	наредена двойка $\left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A \wedge B}$
$\wedge_0^- \dfrac{\overset{\vert\, M}{A \wedge B}}{A}$	лява проекция $(M^{A \wedge B}\llcorner)^A$
$\wedge_1^- \dfrac{\overset{\vert\, M}{A \wedge B}}{B}$	дясна проекция $(M^{A \wedge B}\lrcorner)^B$
разглеждане на случаи	разклонение (Cases)
индукция	рекурсия ($\mathcal{R}$)

Доказателствата като програми (3)

доказателство	λ-терм
$$\forall^+ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall_x A}\; x \notin FV[FA(M)]$$	

Доказателствата като програми (3)

доказателство	λ-терм
$$\forall^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M \\ A\end{array}}{\forall_x A}\ x \notin FV[FA(M)]$$	(зависима) абстракция $(\lambda_x M^A)^{\forall_x A}$

Доказателствата като програми (3)

доказателство	λ-терм
$$\forall^+ \; \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall_x A} \; x \notin FV[FA(M)]$$	(зависима) абстракция $(\lambda_x M^A)^{\forall_x A}$
$$\forall^- \; \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ \forall_x A \end{array} \qquad t}{A[x \mapsto t]}$$	

Доказателствата като програми (3)

доказателство	λ-терм
$$\forall^+ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall_x A}\; x \notin FV[FA(M)]$$	(зависима) абстракция $(\lambda_x M^A)^{\forall_x A}$
$$\forall^- \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ \forall_x A \end{array} \qquad t}{A[x \mapsto t]}$$	(зависима) апликация $(M^{\forall_x A} t)^{A[x \mapsto t]}$
$$\exists^+ \dfrac{t \qquad \begin{array}{c} \mid M \\ A[x \mapsto t] \end{array}}{\exists_x A}$$	

Доказателствата като програми (3)

доказателство	λ-терм
$$\forall^+ \ \frac{\begin{array}{c}\mid M \\ A\end{array}}{\forall_x A}\ x \notin FV[FA(M)]$$	(зависима) абстракция $(\lambda_x M^A)^{\forall_x A}$
$$\forall^- \ \frac{\begin{array}{c}\mid M \\ \forall_x A\end{array} \qquad t}{A[x \mapsto t]}$$	(зависима) апликация $(M^{\forall_x A} t)^{A[x \mapsto t]}$
$$\exists^+ \ \frac{t \qquad \begin{array}{c}\mid M \\ A[x \mapsto t]\end{array}}{\exists_x A}$$	(зависима) наредена двойка $\left\langle t, M^{A[x \mapsto t]} \right\rangle^{\exists_x A}$

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A\right)^B$ $\quad$ (β-редекс)	

Програмите като доказателства

λ-терм		доказателство	
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A)^B$	(β-редекс)	$$\dfrac{\to^{+}\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A\to B}\,u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}\to^{-}$$	(Cut)

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A)^B$ (β-редекс)	$$\dfrac{\rightarrow^{+}\dfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,u \qquad \begin{matrix}\mid N \\ A\end{matrix}}{B}\,\rightarrow^{-}$$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	

Програмите като доказателства

λ-терм		доказателство	
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A)^B$	(β-редекс)	$\begin{array}{r} \\ \rightarrow^{+} \\ \rightarrow^{-} \end{array} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B\end{array}}{A \to B}\, u \qquad \begin{array}{c}\mid N \\ A\end{array}}{B}$	(Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$	(β-редукт)	$\begin{array}{c}\mid N \\ [A] \\ \mid M \\ B\end{array}$	

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A)^B$ (β-редекс)	$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,u\;\to^+ \qquad \begin{matrix}\mid N \\ A\end{matrix}}{B}\;\to^-$$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	$$\begin{matrix}\mid N \\ [A] \\ \mid M \\ B\end{matrix}$$
β-редукция	

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A)^B$ (β-редекс)	$$\rightarrow^- \dfrac{\rightarrow^+ \dfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,u \qquad \begin{matrix}\mid N\\ A\end{matrix}}{B}$$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	$$\begin{matrix}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{matrix}$$
β-редукция	елиминиране на Cut

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A)^B$ $\quad(\beta$-редекс)	$$\begin{array}{l}\\ \to^{+}\\ \to^{-}\end{array}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,u \qquad \begin{matrix}\mid N\\ A\end{matrix}}{B}$$ $\quad$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ $\quad(\beta$-редукт)	$$\begin{matrix}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{matrix}$$
β-редукция	елиминиране на Cut
терм в нормална форма	

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A\right)^B$ (β-редекс)	$\cfrac{\to^{+}\ \cfrac{\begin{matrix}\cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,u \qquad \begin{matrix}\mid N \\ A\end{matrix}}{B}\,\to^{-}$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	$\begin{matrix}\mid N \\ [A] \\ \mid M \\ B\end{matrix}$
β-редукция	елиминиране на Cut
терм в нормална форма	доказателство без Cut

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} N^A\right)^B$ (β-редекс)	(Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	
β-редукция	елиминиране на Cut
терм в нормална форма	доказателство без Cut
теорема за силна нормализация	

$$\rightarrow^- \dfrac{\rightarrow^+ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M \\ B\end{array}}{A \to B}\, u \qquad \begin{array}{c}\mid N \\ A\end{array}}{B} \qquad \text{(Cut)}$$

$$\begin{array}{c}\mid N \\ [A] \\ \mid M \\ B\end{array}$$

Програмите като доказателства

λ-терм	доказателство
$((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A)^B$ (β-редекс)	$\rightarrow^-\ \dfrac{\rightarrow^+\ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A \to B}\,u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}$ (Cut)
$M^B[u^A \mapsto N^A]$ (β-редукт)	$\begin{array}{c}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{array}$
β-редукция	елиминиране на Cut
терм в нормална форма	доказателство без Cut
теорема за силна нормализация	теорема за елиминиране на Cut

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mid M}{A\to B} \quad \cancel{A}^u}{B}\,\to^-}{A\to B}\,\to^+ u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \dfrac{\mid M}{A\to B}$

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\rightarrow^{+}\dfrac{\rightarrow^{-}\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array}\qquad \cancel{A}^u}{B}}{A\to B}\,u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array}$
Λ^T	

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \overset{\eta}{\to} M^{A\to B}$	$\to^+ \dfrac{\to^- \dfrac{\dfrac{\mid M}{A\to B} \quad \cancel{A}^u}{B}}{A\to B}\,u \quad \overset{\eta}{\to} \quad \dfrac{\mid M}{A\to B}$
Λ^T	$Nm(\to)$

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\dfrac{\to^+ \dfrac{\to^- \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array} \quad \cancel{A}^u}{B}}{A\to B}\,u}{} \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\rightarrow^{-}\dfrac{\rightarrow^{+}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mid M}{A \to B} \quad \cancel{A}^u}{B}}{A \to B}\, u}{} \quad \xrightarrow{\eta} \quad \dfrac{\mid M}{A \to B}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	коректност на доказателство

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\to^+ \dfrac{\to^- \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \to B \end{matrix} \qquad \cancel{A}^u}{B}}{A \to B}\, u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{matrix} \mid M \\ A \to B \end{matrix}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	коректност на доказателство
обитаем тип	

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\to^+ \dfrac{\to^- \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A\to B\end{matrix} \qquad \cancel{A^u}}{B}}{A\to B}\,u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{matrix}\mid M \\ A\to B\end{matrix}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	коректност на доказателство
обитаем тип	теорема

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \to B \end{matrix} \quad A^u}{B}\to^-}{A\to B}\to^+ u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{matrix} \mid M \\ A \to B \end{matrix}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	коректност на доказателство
обитаем тип	теорема
проверка за обитаемост	

Програмите като доказателства (2)

λ-терм	доказателство
$\left(\lambda_{u^A}(M^{A\to B}u^A)^B\right)^{A\to B} \xrightarrow{\eta} M^{A\to B}$	$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array}\qquad \cancel{A}^u}{B}\,{\to^-}}{A\to B}\,{\to^+}\,u \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{array}{c}\mid M\\ A\to B\end{array}$
Λ^T	$Nm(\to)$
типова коректност	коректност на доказателство
обитаем тип	теорема
проверка за обитаемост	търсене на доказателство

HA^ω

Типове

$$\sigma, \tau \quad ::= \quad \alpha \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{N} \mid \sigma \Rightarrow \tau \mid \sigma \otimes \tau$$

HA^ω

Типове

$$\sigma, \tau \quad ::= \quad \alpha \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{N} \mid \sigma \Rightarrow \tau \mid \sigma \otimes \tau$$

Термове

$$\begin{array}{rclll} s, t & ::= & x^\rho & \mid (\lambda_{x^\rho} t^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma} & \mid (s^{\rho \Rightarrow \sigma} t^\rho)^\sigma \\ & & & \mid \mathsf{Pair}_{\rho,\sigma}^{\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \otimes \sigma} & \mid \mathsf{Split}_{\rho,\sigma,\tau} : \rho \otimes \sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \\ & & & \mid \mathsf{tt}^\mathsf{B} \mid \mathsf{ff}^\mathsf{B} & \mid \mathsf{Cases}_\tau : B \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \\ & & & \mid 0^\mathsf{N} \mid \mathsf{S}^{\mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{N}} & \mid \mathcal{R}_\tau : \mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow (\mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \end{array}$$

HA^ω

Типове

$$\sigma, \tau \quad ::= \quad \alpha \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{N} \mid \sigma \Rightarrow \tau \mid \sigma \otimes \tau$$

Термове

$$\begin{array}{rcll} s, t & ::= & x^\rho & \mid (\lambda_{x^\rho} t^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \qquad \mid (s^{\rho\Rightarrow\sigma} t^\rho)^\sigma \\ & & & \mid \mathsf{Pair}_{\rho,\sigma}^{\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\rho\otimes\sigma} \qquad \mid \mathsf{Split}_{\rho,\sigma,\tau} : \rho \otimes \sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \\ & & & \mid \mathsf{tt}^\mathsf{B} \mid \mathsf{ff}^\mathsf{B} \qquad \mid \mathsf{Cases}_\tau : B \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \\ & & & \mid 0^\mathsf{N} \mid \mathsf{S}^{\mathsf{N}\Rightarrow\mathsf{N}} \qquad \mid \mathcal{R}_\tau : \mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow (\mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \end{array}$$

$$\langle s, t\rangle := \mathsf{Pair}\, s\, t, \quad t_\llcorner := \mathsf{Split}\, t\, (\lambda_{x,y} x), \quad t_\lrcorner := \mathsf{Split}\, t\, (\lambda_{x,y} y).$$

HA^ω

Типове

$$\sigma, \tau \quad ::= \quad \alpha \mid \mathsf{B} \mid \mathsf{N} \mid \sigma \Rightarrow \tau \mid \sigma \otimes \tau$$

Термове

$$\begin{array}{rclll} s, t & ::= & x^\rho & \mid (\lambda_{x^\rho} t^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} & \mid (s^{\rho\Rightarrow\sigma} t^\rho)^\sigma \\ & & & \mid \mathsf{Pair}_{\rho,\sigma}^{\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\rho\otimes\sigma} & \mid \mathsf{Split}_{\rho,\sigma,\tau} : \rho\otimes\sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \\ & & & \mid \mathsf{tt}^\mathsf{B} \mid \mathsf{ff}^\mathsf{B} & \mid \mathsf{Cases}_\tau : B \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \\ & & & \mid 0^\mathsf{N} \mid \mathsf{S}^{\mathsf{N}\Rightarrow\mathsf{N}} & \mid \mathcal{R}_\tau : \mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow (\mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \end{array}$$

$$\langle s, t\rangle := \mathsf{Pair}\, s\, t, \quad t_\llcorner := \mathsf{Split}\, t\, (\lambda_{x,y} x), \quad t_\lrcorner := \mathsf{Split}\, t\, (\lambda_{x,y} y).$$

Редукции

$$\begin{array}{ll} (\lambda_x s)t \xrightarrow{\beta} s[x \mapsto t] & \mathsf{Split}\, \langle s, t\rangle\, f \xrightarrow{\beta} f\, s\, t \\ \mathsf{Cases}\, \mathsf{tt}\, s\, t \xrightarrow{\beta} s & \mathsf{Cases}\, \mathsf{ff}\, s\, t \xrightarrow{\beta} t \\ \mathcal{R}\, 0\, s\, t \xrightarrow{\beta} s & \mathcal{R}\, (\mathsf{S}n)\, s\, t \xrightarrow{\beta} t\, n\, (\mathcal{R}\, n\, s\, t) \end{array}$$

HA^ω

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$

HA^ω

Формули

$$
\begin{gathered}
A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A \\
F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.
\end{gathered}
$$

HA$^\omega$

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$M, N \quad ::= \quad u^A$$

HA^ω

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$M, N \quad ::= \quad u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid$$

HA^ω

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$M, N \quad ::= \quad u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B$$

HA$^\omega$

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$\begin{aligned} M, N \quad ::= \quad & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & \mid \wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \\ & \mid \wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C \end{aligned}$$

HA$^\omega$

Формули

$$\begin{array}{rcl} A, B & ::= & \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A \end{array}$$
$$F := \mathrm{at}(\mathrm{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathrm{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$\begin{array}{rcl} M, N & ::= & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & & \mid \wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \\ & & \mid \wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C \\ & & \mid \vee^{+0}_{A,B} : A \to A \vee B \mid \vee^{+1}_{A,B} : B \to A \vee B \\ & & \mid \vee^-{}_{A,B,C} : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \end{array}$$

HA$^\omega$

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$\begin{aligned} M, N \quad ::= \quad & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & \mid \wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \\ & \mid \wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C \\ & \mid \vee^{+0}_{A,B} : A \to A \vee B \mid \vee^{+1}_{A,B} : B \to A \vee B \\ & \mid \vee^-{}_{A,B,C} : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \\ & \mid (\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall_{x^\rho} A} \quad (x \notin \mathsf{FV}[\mathsf{FA}(M)]) \mid (M^{\forall_{x^\rho} A} t^\rho)^{A[x \mapsto t]} \end{aligned}$$

HA^ω

Формули

$$\begin{array}{rcl} A, B & ::= & \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A \\ \multicolumn{3}{c}{F := \mathrm{at}(\mathsf{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathsf{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.} \end{array}$$

Доказателства

$$\begin{array}{rcl} M, N & ::= & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & & \mid \wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \\ & & \mid \wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C \\ & & \mid \vee^{+0}_{A,B} : A \to A \vee B \mid \vee^{+1}_{A,B} : B \to A \vee B \\ & & \mid \vee^-{}_{A,B,C} : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \\ & & \mid (\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall_{x^\rho} A} \quad (x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(M)]) \mid (M^{\forall_{x^\rho} A} t^\rho)^{A[x \mapsto t]} \\ & & \mid \exists^+_{x,A} : \forall_{x^\rho} (A \to \exists_{x^\rho} A) \\ & & \mid \exists^-_{x,A,C} : \exists_{x^\rho} A \to \forall_{x^\rho} (A \to C) \to C \quad (x \notin \mathrm{FV}(C)) \end{array}$$

HA^ω

Формули

$$A, B \quad ::= \quad \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \land B \mid A \lor B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A$$
$$F := \mathrm{at}(\mathrm{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathrm{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.$$

Доказателства

$$\begin{aligned} M, N \quad ::= \quad & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & \mid \land^+_{A,B} : A \to B \to A \land B \\ & \mid \land^-_{A,B,C} : A \land B \to (A \to B \to C) \to C \\ & \mid \lor^{+0}_{A,B} : A \to A \lor B \mid \lor^{+1}_{A,B} : B \to A \lor B \\ & \mid \lor^-{}_{A,B,C} : A \lor B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \\ & \mid (\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall_{x^\rho} A} \quad (x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(M)]) \mid (M^{\forall_{x^\rho} A} t^\rho)^{A[x \mapsto t]} \\ & \mid \exists^+_{x,A} : \forall_{x^\rho}(A \to \exists_{x^\rho} A) \\ & \mid \exists^-_{x,A,C} : \exists_{x^\rho} A \to \forall_{x^\rho}(A \to C) \to C \quad (x \notin \mathrm{FV}(C)) \\ & \mid \mathcal{C}_{b,A} : \forall_{b^{\mathsf{B}}}(A[b \mapsto \mathrm{tt}] \to A[b \mapsto \mathrm{ff}] \to A) \end{aligned}$$

HA^ω

Формули

$$\begin{array}{rcl} A, B & ::= & \mathrm{at}(t^{\mathsf{B}}) \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_{x^\rho} A \mid \exists_{x^\rho} A \\ \multicolumn{3}{c}{F := \mathrm{at}(\mathrm{ff}^{\mathsf{B}}), \qquad T := \mathrm{at}(\mathrm{tt}^{\mathsf{B}}), \qquad \neg A := A \to F.} \end{array}$$

Доказателства

$$\begin{array}{rcl} M, N & ::= & u^A \mid \mathsf{AxT}^T \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B} \mid (M^{A \to B} N^A)^B \\ & & \mid \wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \\ & & \mid \wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C \\ & & \mid \vee^{+0}_{A,B} : A \to A \vee B \mid \vee^{+1}_{A,B} : B \to A \vee B \\ & & \mid \vee^-{}_{A,B,C} : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \\ & & \mid (\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall_{x^\rho} A} \quad \color{red}{(x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(M)])} \mid (M^{\forall_{x^\rho} A} t^\rho)^{A[x \mapsto t]} \\ & & \mid \exists^+_{x,A} : \forall_{x^\rho}(A \to \exists_{x^\rho} A) \\ & & \mid \exists^-_{x,A,C} : \exists_{x^\rho} A \to \forall_{x^\rho}(A \to C) \to C \quad \color{red}{(x \notin \mathrm{FV}(C))} \\ & & \mid \mathcal{C}_{b,A} : \forall_{b^{\mathbf{B}}}(A[b \mapsto \mathrm{tt}] \to A[b \mapsto \mathrm{ff}] \to A) \\ & & \mid \mathsf{Ind}_{n,A} : \forall_{n^{\mathbf{N}}}(A[n \mapsto 0] \to \forall_n(A \to A[n \mapsto \mathsf{S}\, n]) \to A) \end{array}$$