Задача 1. *Нека* $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$ *е пермутация на числата от 1 до 12, за които е изпълнено условието:*

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}.$$

Намерете броя на тези пермутации.

Задача 2. *Една функция* $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ *е монотонно растяща, ако* $(\forall i \forall j)[1 \leq i < j \leq n \to f(i) \leq f(j)]$.

1. *Колко такива функции съществуват?*
2. *Колко от тези функции са сюрективни?*
3. *Колко от тези функции са инективни?*

1 Принцип на Включване и Изключване

Задача 3. *Дадени са* n *кутии и* m *неразличими топки. По колко начина могат да се разпределят всички топки в кутиите, така че нито в една кутия да няма повече от* r *топки?*

Задача 4. *Колко решения в естествените числа имат уравненията:*

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 11$;
2. $x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_2 \geq 3$;
3. $x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_2 \leq 3$;
4. $x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$;
5. $x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \leq 8$;

Задача 5. $x_1 + x_2 + x_3 = n$, *където* $0 \leq x_i \leq k$, *за всяко* $1 \leq i \leq 3$ *и* $n < 3k$.

Задача 6. *Нека* U *е множество от* $n (n \geq 3)$ *елемента. За всяко множество* $X \subseteq U$, *с* $\overline{X}$ *означаваме* $U \setminus X$.

а) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$;

б) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X| = 1$;

в) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X| = 2$;

г) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X| = k$ *и* $k < n$;

д) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|(X \setminus Y) \cup (X \setminus \overline{Y})| = k$ *и* $k < n$;

е) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X \setminus Y| = 1$;

ж) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X \setminus Y| = k$ *и* $k < n$;

з) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $X \cap Y = \emptyset$;

и) *Намерете броя на двойките* (X, Y) *за* $X, Y \subseteq U$, *за които* $|X \cap Y| = k$ *и* $k < n$;

к) *Намерете броя на двойките* $(X, Y), X, Y \subseteq U$, *за които* $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$;

л) *Намерете броя на двойките* $(X, Y), X, Y \subseteq U$, *за които* $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = k$ *и* $k < n$;

м) *Намерете броя на тройките* $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, *за които* $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

н) *Намерете броя на тройките* $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, *за които* $Y \cup X = Z \cup \overline{Y}$;

о) *Намерете броя на двойките* $(X, Y), X, Y \subseteq U$, *за които* $X \cap Y = \emptyset$ *и* $|X| \geq 1$, $|Y| \geq 1$;

п) Намерете броя на двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$*, за които* $X \cap Y = \emptyset$ *и* $|X| \geq 2, |Y| \geq 2$*;*

р) Намерете броя на двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$*, за които* $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$ *и* $|X| \geq 2, |Y| \geq 2$*;*

с) Намерете броя на тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$*, за които* $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *и* $|Z| = 0$.

т) Намерете броя на тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$*, за които* $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *и* $|X| \geq 1, |Y| \geq 1, |Z| = 1$.

у) Намерете броя на тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$*, за които* $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *и* $|X| \geq 1, |Y| \geq 1, |Z| \leq 1$.

Задача 7. *Нека са дадени естествените числа* m *и* n*,* $m \geq n$*. Намерете броя на тоталните* сюрективни *функции* $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.