Примерни решения на задачите от изпита по Дискр. Стр-ри на Информатика, 10 юни 2019 г.

Зад. 1 По колко начина може да се оцвети надписът

`ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ СПЕЦИАЛНОСТ ИНФОРМАТИКА 2019`

като се ползват пет различни цвята—червен, зелен, жълт, черен и син—при следните ограничения:

- Всяка дума е оцветена в един цвят. "2019" също е дума.
- Различните думи са оцветени в различни цветове.
- "ИНФОРМАТИКА" не е черна, "2019" не е жълта и "ДИСКРЕТНИ" не е зелена.

Решение: Да означим с A_1 множеството от оцветявания, в които "ИНФОРМАТИКА" е черна, с A_2, множеството от оцветявания, в които "2019" е жълта и с A_3, множеството от оцветявания, в които "ДИСКРЕТНИ" е зелена. Трябва да намерим $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$. Нека U е множеството от всички оцветявания на петте думи в петте цвята без повтаряне на цветове. Съгласно принципа на включването и изключването:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Очевидно $|U| = 5!$. Забележете, че $|A_1| = 4!$, защото можем да оцветяваме без повтаряне четири думи в четири цвята по $4!$ начина. Нещо повече, $|A_1| = |A_2| = |A_3|$. Напълно аналогично следва, че $|A_1 \cap A_2| = 3!$, както и $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$. По същия начин извеждаме, че така $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2!$.

Заместваме и получаваме

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 5! - 3.4! + 3.3! - 2! = 120 - 72 + 18 - 2 = 64$$

□

Зад. 2 За всяко $n \geq 1$, нека a_n означава броя на начините да напишем n като сума от 1 и 2, ако редът на събираемите ***има значение***. Примерно, за целите на тази задача $1 + 2$ и $2 + 1$ са различни начини да се напише 3. Въпросната сума може да има и само едно събираемо.

12 т. • Съставете рекурентно уравнение за a_n. Обосновете добре уравнението. Уравнения без обосновка няма да се признават.

8 т. • Решете рекурентното уравнение.

Решение: Очевидно, 1 може да се напише по само един начин като $1 = 1$. Числото 2 може да се напише по два начина: $2 = 1 + 1$ и $2 = 2$. Всяко по-голямо число n може да се напише със сума, която завършва или на 1, или на 2:

- Ако въпросната сума завършва на 1, то тя е от вида $\Sigma + 1$, където Σ е подредена сума от единици и двойки, равна на $n - 1$. Очевидно Σ може да се представи като подредена сума на единици и двойки по точно a_{n-1} начина.
- Ако въпросната сума завършва на 2, то тя е от вида $\Sigma + 2$, където Σ е подредена сума от единици и двойки, равна на $n - 2$. Очевидно Σ може да се представи като подредена сума на единици и двойки по точно a_{n-2} начина.

Тъй като подредените суми на n се разбиват на тези, които завършват на 1, и тези, които завършват на 2, съгласно комбинаторния принцип на събирането имаме $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Търсеното рекурентно уравнение е

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1, \\ 2, & \text{ако } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Неговото решение е

$$a_n = \left(1/2 - 1/10\sqrt{5}\right)\left(1/2 - 1/2\sqrt{5}\right)^n + \left(1/10\sqrt{5} + 1/2\right)\left(1/2\sqrt{5} + 1/2\right)^n$$

□

Зад. 3 Нека A и B са непразни множества. Нека $R_A \subseteq A^2$ и $R_B \subseteq B^2$ са релации. Дефинираме релацията $R \subseteq (A \times B)^2$ така:

$$\forall (a,b) \in A \times B \;\; \forall (c,d) \in A \times B : (a,b)\, R\, (c,d) \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} aR_Ac \wedge bR_Bd$$

10 т. • Докажете или опровергайте, че ако R_A и R_B са релации на еквивалентност, то R е релация на еквивалентност.

10 т. • Докажете или опровергайте, че ако R_A и R_B са релации на частична наредба, то R е релация на частична наредба.

Решение: Ако ако R_A и R_B са релации на еквивалентност, то R е релация на еквивалентност. Да допуснем, че R_A и R_B са релации на еквивалентност. Ще докажем, че R е релация на еквивалентност.

- Ще докажем, че R е рефлексивна. Тоест, че

$$\forall (a,b) \in A \times B : (a,b)\, R\, (a,b)$$

По дефиниция, това е същото като

$$\forall (a,b) \in A \times B : aR_Aa \wedge bR_Bb$$

Но R_A и R_B са рефлексивни по допускане, щом са релации на еквивалентност. Тогава наистина aR_Aa за всяко $a \in A$ и bR_Bb за всяко $b \in B$. Желаният резултат следва веднага.

- Ще докажем, че R е симетрична. Тоест, че

$$\forall (a,b) \in A \times B \;\; \forall (c,d) \in A \times B : (a,b)\, R\, (c,d) \to (c,d)\, R\, (a,b)$$

По дефиниция, това е същото като

$$\forall (a,b) \in A \times B \;\; \forall (c,d) \in A \times B : (aR_Ac \wedge bR_Bd) \to (cR_Aa \wedge bR_Bd)$$

Но ние знаем, че R_A е симетрична. Тогава $aR_Ac \leftrightarrow cR_Aa$ и $bR_Bd \leftrightarrow dR_Bb$. Тогава антецедентът на импликацията има същата логическа стойност като консеквента: или и двата са истина, или и двата са лъжа. И в двата случая импликацията е истина.

- Ще докажем, че R е транзитивна. Тоест, че

$$\forall (a,b) \in (A \times B) \;\; \forall (c,d) \in (A \times B) \;\; \forall (e,f) \in (A \times B) : (a,b)\, R\, (c,d) \wedge (c,d)\, R\, (e,f) \;\to\; (a,b)\, R\, (e,f)$$

По дефиниция това е същото като

$$(aR_Ac \wedge bR_Bd) \wedge (cR_Ae \wedge dR_Bf) \to (aR_Ae \wedge bR_Bf)$$

Поради комутативността на конюнкцията можем да препишем това така:

$$(aR_Ac \wedge cR_Ae) \wedge (bR_Bd \wedge dR_Bf) \to (aR_Ae \wedge bR_Bf)$$

Да допуснем, че антецедентът е истина. Той е конюнкция от $aR_Ac \wedge cR_Ae$ и $bR_Bd \wedge dR_Bf$. Тогава и $aR_Ac \wedge cR_Ae$, и $bR_Bd \wedge dR_Bf$ са истина. Но R_A и R_B са транзитивни. Веднага следва, че aR_Ae и bR_Bf са истина. В този случай импликацията е истина.

Ако допуснем, че антецедентът е лъжа, импликацията е истина независимо от консеквента.

Тогава импликацията е истина винаги.

Ако R_A и R_B са релации на частична наредба, то R е релация на частична наредба. Да допуснем, че R_A и R_B са релации на частична наредба. Ще докажем, че R е релация на частична наредба.

Вече доказахме, че рефлексивност на R_A и R_B влече рефлексивност на R и транзитивност на R_A и R_B влече транзитивност на R. Остава да докажем, че ако R_A и R_B са антисиметрични, то R е антисиметрична.

Да допуснем, че R_A и R_B са антисиметрични. Ще докажем, че

$$\forall (a, b) \in A \times B \;\; \forall (c, d) \in A \times B : (a, b) \neq (c, d) \to ((a, b)\, R\, (c, d) \to \neg((c, d)\, R\, (a, b)))$$

Разглеждаме произволни наредени двойки (a, b), (c, d), такива че $(a, b) \neq (c, d)$. Ще докажем, че

$$(a, b)\, R\, (c, d) \to \neg((c, d)\, R\, (a, b))$$

Може да го препишем така

$$(aR_A c \wedge bR_B d) \to \neg(cR_A a \wedge dR_B b)$$

Съгласно закона на Де Морган, това е еквивалентно на

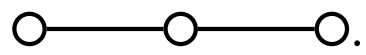
$$(aR_A c \wedge bR_B d) \to (\neg cR_A a \vee \neg dR_B b) \tag{1}$$

Поне едното от $a \neq c$, $b \neq d$ е вярно, щом $(a, b) \neq (c, d)$. Без ограничение на общността, нека $a \neq c$. Знаем, че R_A е антисиметрична. Тогава е вярно, че $\neg cR_A a$. Можем да препишем (1) така

$$(\neg cR_A a \wedge bR_B d) \to (\neg cR_A a \vee \neg dR_B b) \tag{2}$$

Ако антецедентът е истина, то $\neg cR_A a$ е истина, следователно консеквентът е истина, понеже е дизюнкция от съждения, едното от които е $\neg cR_A a$; ерго, импликацията е истина. Ако антецедентът е лъжа, импликацията е истина независимо от консеквента. Доказахме, че (2) е истина. $\square$

Зад. 4 Предложете индуктивна дефиниция на множеството от дърветата, всяко от които има поне три върха и няма върхове от степен две.

Решение: Дървета с точно три върха без върхове от степен две няма, защото всяко дърво с три върха е изоморфно на . Следователно, става дума за дървета с четири или повече върха, които нямат върхове от степен две. За краткост, да наречем множеството от тези дървета "S". Една възможност за индуктивна дефиниция на S е тази.

База За всяко $k \geq 3$, всеки граф, изоморфен на $\big(\{a, b_1, b_2 \ldots, b_k\}, \{(a, b_1), (a, b_2), \ldots, (a, b_k)\}\big)$, принадлежи на S.

Индуктивно предположение Нека T е произволен елемент на S и нека y е произволен висящ връх в T.

Индуктивна стъпка За произволно $t \geq 2$, нека w_1, w_2, $\ldots$, w_t са нови върхове. Тогава графът

$$\big(V(T) \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}, E(T) \cup \{(y, w_1), (y, w_2), \ldots, (y, w_t)\}\big)$$

принадлежи на S.

Заключение В S няма други елементи освен тези, добавени от горепосочените стъпки.

□

Зад. 5 Нека $x, y \in \mathbb{N}^+$, като $x \geq y$. Дадени са x града, които се намират върху y острова. Върху всеки остров има поне един град. Какъв е максималният брой шосета, които може да се направят между тези градове, ако всяко шосе свързва два различни града, а между два града може да има най-много едно шосе? Две шосетата може да се пресичат или да не се пресичат – това няма значение за тази задача; ако се пресичат, допуснете, че във всяко място на пресичане едното шосе минава с мост над другото. Допуснете, че шосета между различни острови не може да има (островите са прекалено далече един от друг).

Решение: Задачата естествено се моделира с неориентиран граф, чиито върхове са градовете. Ако съобразим, че броят на шосетата се максимизира тстк на всеки остров всеки граф е свързан с всеки друг чрез шосе, става ясно, че графът има точно y свързани компоненти: по една за всеки остров. Пита се, колко ребра най-много има граф с x върха, който има точно y свързани компоненти, където $y \leq x$.

Нека свързаните компоненти са $G_1, \ldots, G_y$, и G_i има n_i върха за $1 \leq i \leq y$. Тъй като компонентите имат поне по един връх, очевидно $1 \leq n_i \leq x - y + 1$ за всяко i. Освен това, $\sum_{i=1}^{y} n_i = x$. При дадени $n_1, \ldots, n_y$, броят на ребрата се максимизира, когато всеки G_i е пълен граф – това е очевидно.

Сега ще докажем, че броят на ребрата в G е максимален, когато една свързана компонента съдържа $x - y + 1$ върха, което означава, че тя съдържа $\binom{x-y+1}{2}$ ребра, а останалите компоненти имат по един връх, което означава, че имат по нула ребра. Това следва лесно от факта, че функцията-брой на ребрата е квадратична в броя на върховете, но ще извършим доказателството подробно. Да си представим алгоритъм, който получава свързаните компоненти $G_1, \ldots, G_y$ със съответно $n_1, \ldots, n_y$ върха и прави следното: докато не е вярно, че всички свързани компоненти без една имат по точно един връх, разглежда две компоненти G_i и G_j със съответно n_i и n_j върха (където $n_i > 1$ и $n_j > 1$) и прехвърля по един връх от едната от тях в другата съгласно следното правило:

- ако G_i и G_j имат еднакъв брой върхове, прехвърляме връх от коя да е от тях в другата,
- в противен случай прехвърляме от тази с по-малко върхове в другата.

докато една от тях не остане само с един връх. След всяко прехвърляне на връх, компонентата, която получава връх, става пак пълен граф (с добавяне на всички необходими за целта ребра), а тази, от която се вади връх, остава пълен граф, но на върхове с един по-малко от преди.

Без ограничение на общността, нека $n_i \geq n_j$ и нека прехвърлим един връх от G_j в G_i. Да видим как това се отразява на броя на ребрата след добавяне и махане на необходимите бройки ребра. Преди прехвърлянето на връх, в тези компоненти е имало $\binom{n_i}{2} + \binom{n_j}{2}$ ребра. След прехвърлянето и добавянето и махането на ребра, така че G_i и G_j пак да са пълни графи е вярно, че G_i вече има $\binom{n_i+1}{2}$ ребра, а G_j, само $\binom{n_j-i}{2}$ ребра. Тогава общият брой ребра на G нараства с

$$\left(\underbrace{\binom{n_i+1}{2} + \binom{n_i-1}{2}}_{\text{брой ребра в } G_i \text{ и } G_j \text{ след прехвърлянето}} \right) - \left(\underbrace{\binom{n_i}{2} + \binom{n_j}{2}}_{\text{брой ребра в } G_i \text{ и } G_j \text{ преди прехвърлянето}} \right)$$

тъй като в останалите свързани компоненти не се мени нищо. Но

$$\binom{n_i+1}{2} + \binom{n_j-1}{2} - \binom{n_i}{2} - \binom{n_j}{2} =$$
$$\frac{1}{2}((n_i+1)n_i + (n_j-1)(n_j-2) - n_i(n_i-1) - n_j(n_j-1)) =$$
$$\frac{1}{2}(n_i^2 + n_i + n_j^2 - 3n_j + 2 - n_i^2 + n_i - n_j^2 + n_j) = \frac{1}{2}(2n_i - 2n_j + 2) = n_i - n_j + 1$$

Излиза, че дори да започнем да прехвърляме при равен брой върхове в двете компоненти пак "печелим" едно ребро, а ако прехвърляме от по-малка като брой върхове компонента в по-голяма, "печалбата" е дори по-голяма.

Лесно се вижда, че всяка итерация на този алгоритъм увеличава с поне единица броя на ребрата в графа, и крайният брой ребра, независимо от поредицата избори от коя в коя компонента да прехвърляме, е $\binom{x-y+1}{2}$. Това е абсолютният максимум за броя на ребрата при y свързани компоненти. Както стана ясно от доказателството, тази горна граница е достижима. $\square$

Зад. 6 Дадени са булеви функции $f(x, y, z) = (11100111)$ и $g(x, y, w, z) = (0011000110100101)$.

5 т. • Напишете в явен вид булевата функция $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$.

5 т. • Напишете нейната Съвършена Дизюнктивна Нормална Форма.

Решение: Забележете, че g е функция на 4 променливи, но $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$ е функция на 2 променливи, наречени x и y. Да я наречем $q(x, y)$. Търси се каноничния запис на q като булев вектор от четири булеви стойности.

$f(x, y, x)$ е функция на две променливи. Да я наречем $u(x, y)$. $u(00) = f(000) = 1$. $u(01) = f(010) = 1$. $u(10) = f(101) = 1$. $u(11) = f(111) = 1$.

$f(x, y, y)$ също е функция на две променливи. Да я наречем $v(x, y)$. $v(00) = f(000) = 1$. $v(01) = f(011) = 0$. $v(10) = f(100) = 0$ $v(11) = f(111) = 1$.

Определихме напълно u и v. Търсената $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$ е $q(u(x, y), v(x, y), x, y)$. $q(00) = g(u(00), v(00), 0, 0) = g(1100) = 0$. $q(01) = g(u(01), v(01), 0, 1) = g(1001) = 0$. $q(10) = g(u(10), v(10), 1, 0) = g(1010) = 1$. $q(11) = g(u(11), v(11), 1, 1) = g(1111) = 1$. Тогава q е булевата функция 0011. Нейната СъвДНФ е $x\,\overline{y} \vee x\,y$. □