0.1 Алгоритъм на Дейкстра

Разглеждам ориентиран графи $G = (V, E, c)$ с *положителни* тегла по ребрата. Теглата са зададени с функцията $c : E \to \mathbb{R}^+$. Алгоритъмът на Дейкстра намира най-късите пътища от предварително зададен връх до всички останали върхове в графа.

Алгоритъмът на Дейкстра следва следните стъпки:

1) Разширяваме c до функцията $c^\star : V \times V \to R^+ \cup \{\infty\}$ по следния начин

$$c^\star((u,v)) = \begin{cases} c((u,v)) & \text{, ако } (u,v) \in E \\ \infty & \text{, ако } (u,v) \notin E \end{cases}$$

2) Дефинираме функция $\delta : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ като

$$\delta(u) = \begin{cases} c((s,u)) & \text{, ако } (s,u) \in E \\ \infty & \text{, иначе} \end{cases}$$

   Тъй като V е крайно множество, можем да представим d като масив.

3) Нека $V' = V \setminus \{s\}$, където $s \in V$ е върха от който искаме да намерим най-късите пътища.

4) Докато има върхове $u \in V'$, за които $\delta(u) < \infty$, то изпълняваме

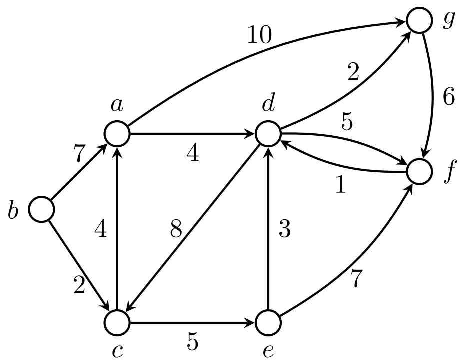
   i) Избираме връх $u \in V'$, за който $\delta(u) = min\{\delta(v) \mid v \in V'\}$. Такъв със сигурност съществува.

   ii) $V' := V' \setminus \{u\}$.

   iii) за всеки $v \in V'$, $\delta(v) := min\{\delta(v), \delta(u) + c^\star((u,v))\}$

5) Във V' може да има останали върхове v, но те имат $\delta(v) = \infty$, т.е. те са недостижими от s и следователно пътя от s до v има дължина ∞.

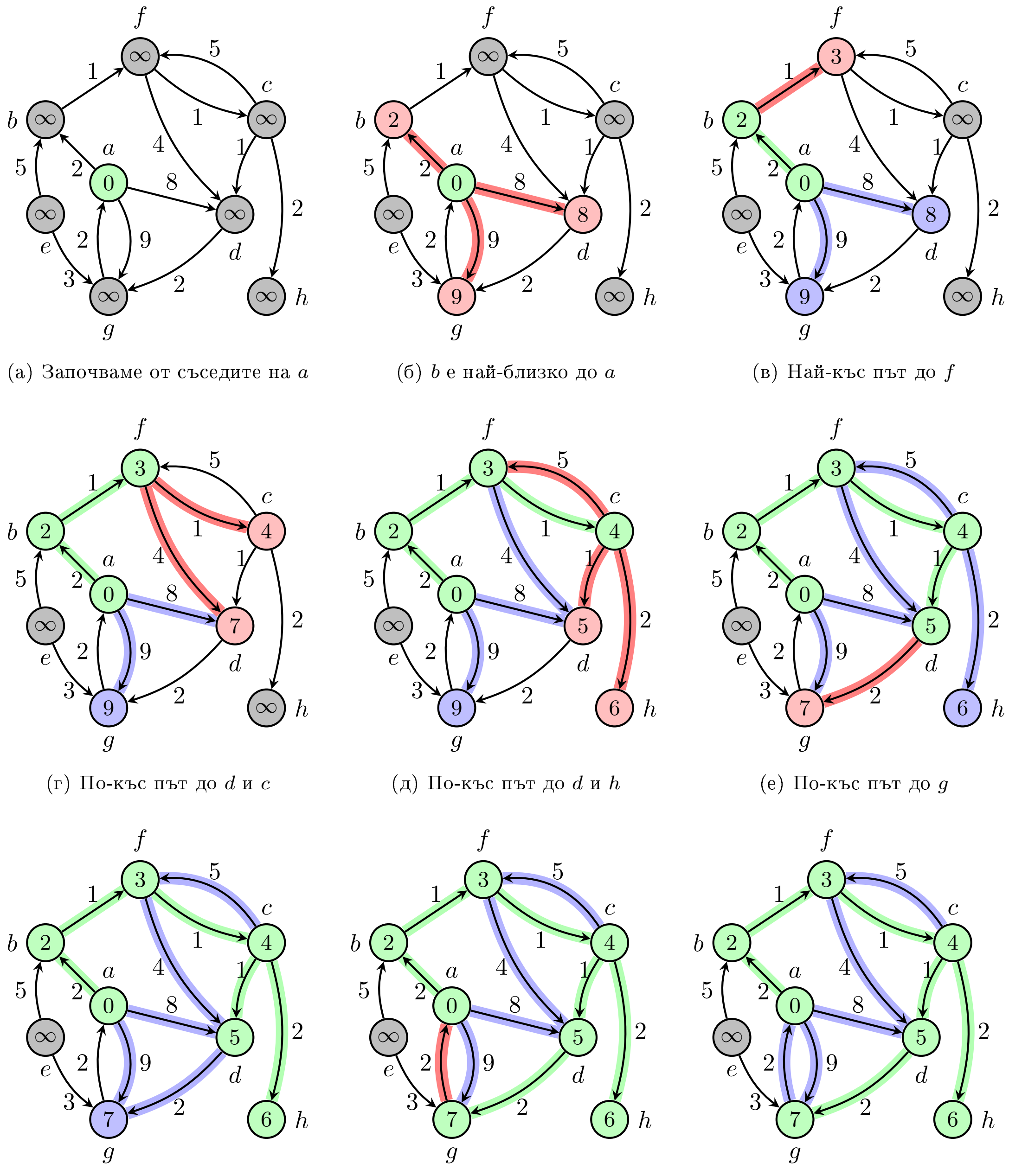
Фигура 1 илюстрира как се променя функцията δ по време на изпълнението на алгоритъма. Освен това, с лека модификация на горния алгоритъм, можем да намерим не само стойността на най-късите пътища, но и списък с ребрата, които участват във всеки от тях. Фигура 2 илюстрира това. Ребрата, оцветени в зелено, са тези, които участват в най-късите пътища.



$\delta(a)$	$\delta(b)$	$\delta(c)$	$\delta(d)$	$\delta(e)$	$\delta(f)$	$\delta(g)$
∞	$\boxed{\mathbf{0}}$	∞	∞	∞	∞	∞
7	:	$\boxed{\mathbf{2}}$	∞	∞	∞	∞
$\boxed{\mathbf{6}}$	:	:	∞	7	∞	∞
:	:	:	10	$\boxed{\mathbf{7}}$	∞	16
:	:	:	$\boxed{\mathbf{10}}$	:	14	**12**
:	:	:	:	:	14	$\boxed{\mathbf{12}}$
:	:	:	:	:	$\boxed{\mathbf{14}}$	:
:	:	:	:	:	:	:

(б) Разстояния с начален връх b

Фигура 1: Алгоритъм на Дейкстра



(а) Започваме от съседите на a

(б) b е най-близко до a

(в) Най-къс път до f

(г) По-къс път до d и c

(д) По-къс път до d и h

(е) По-къс път до g

(ж) h е задънена улица

(з) e не е достижим

(и) Краен резултат

Фигура 2: Алгоритъм на Дейкстра запазващ минималните пътища