Задача 1. *Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1 за да получите характеристичен вектор на самодвойнствена функция.*

а) $\chi_f = (1-0-)$;

б) $\chi_f = (01-0-0--)$;

в) $\chi_f = (--01--11)$;

0.1 Линейни функции

Всяка булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ с полином на Жегалкин от вида $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \cdots \oplus a_n x_n$ наричаме *линейна*. Ще означаваме с L множеството от всички линейни булеви функции, а с L^n тези на n променливи.

Задача 2. *Линейна ли е функцията f с характеристичен вектор $\chi_f = (1001011010010110)$?*

Задача 3. *Заменете $-$ в $\chi_f = (-110---0)$ с 0 или 1, така че да получите f линейна.*

Задача 4. *Проверете дали f е линейна функция.*

1) $f = x \rightarrow y$;

2) $f = \overline{x \rightarrow y} \oplus \overline{x}y$;

3) $f = xy \vee \overline{x}.\overline{y} \vee z$;

4) $f = xy\overline{z} \vee x\overline{y}$;

5) $f = (x \vee yz) \oplus xyz$;

6) $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$;

7) $\chi_f = (11000011)$;

8) $\chi_f = (1001011001101001)$;

Задача 5. *Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1, така че да получите f линейна.*

1) $\chi_f = (10-1)$;

2) $\chi_f = (100-0---)$;

3) $\chi_f = (-001--1-)$;

4) $\chi_f = (11-0---1)$;

5) $\chi_f = (-0-1--00)$;

6) $\chi_f = (--10----0--1-110)$;

0.2 Монотонни функции

Нека α и β са два бинарни вектора с равна дължина. Дефинираме релацията $\preceq$ между тях по следния начин.

$$\alpha \preceq \beta \leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \wedge (\forall i \leq |\alpha|)[a_i \leq b_i].$$

Булевата фунция $f(x_1, \ldots, x_n)$ наричаме *монотонна*, ако

$$(\forall \alpha, \beta \in J_2^n)[\alpha \preceq \beta \rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)].$$

Ще означаваме с M множеството от всички монотонни булеви функции, а с M^n тези на n променливи.

Задача 6. *Проверете монотонни ли са функциите:*

1) $f = x \rightarrow (y \rightarrow x)$;

2) $f = x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

3) $f = (x \oplus y)xy$;

4) $f = xy \oplus yz \oplus zx$;

5) $f = xy \oplus yz \oplus zx \oplus x$;

Задача 7. *За немонотонните функции* f, *намерете съседни* α, β, *такива че* $\alpha \prec \beta$ *и* $f(\alpha) > f(\beta)$.

а) $f = xyz \vee \overline{x}y$;

б) $f = x \oplus y \oplus z$;

в) $f = xy \oplus z$;

г) $f = x \vee y\overline{z}$;

д) $f = xz \oplus yt$;

е) $f(x, y, z, t) = (xyt \rightarrow yz) \oplus t$;

Proof. а) $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$;

б) $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$;

в) $\alpha = (110)$, $\beta = (111)$;

г) $\alpha = (010)$, $\beta = (011)$;

д) $\alpha = (0111)$, $\beta = (1111)$;

е) $\alpha = (1110)$, $\beta = (1111)$;

□

0.3 Пълнота и затворени класове

Theorem 1 (Критерий за пълнота на Пост-Яблонский). *Нека $P \subseteq F_2$. Множеството P е пълно тогава и само тогава, когато то* не *е подмножество на нито едно от множествата T_0, T_1, S, M, L.*

Задача 8. *Пълна ли е системата от функции?*

1) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

2) $A = \{1, xy(x \oplus z)\}$;

3) $A = \{x \to y, x \oplus y\}$;

4) $A = \{0, \overline{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

5) $A = \{x \to y, \overline{x} \to \overline{y}x, x \oplus y \oplus z, 1\}$;

6) $A = \{\chi_{f_1} = (0110), \chi_{f_2} = (11000011), \chi_{f_3} = (10010110)\}$;

7) $A = \{\chi_{f_1} = (11), \chi_{f_2} = (00), \chi_{f_3} = (00110101)\}$;

Задача 9. *Проверете пълно ли е множеството от булеви функции:*

а) $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;

б) $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$.

в) $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;

г) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;

д) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;

е) $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;

Задача 10. *Проверете дали системата от функции A е базис?*

а) $A = \{x \to y, x \oplus y, x \vee y\}$;

б) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y, 0, 1\}$;

в) $A = \{xy \oplus yz \oplus zx, 0, 1, x \vee y\}$;