Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2019/2020 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*25*	*25*	*25*	*25*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Матрица на Адамар от ред n се нарича всяка матрица с n реда и n стълба, съставена само от $+1$ и -1 така, че всеки два реда се различават точно в половината позиции.

а) Докажете, че ако има матрица на Адамар от ред $n > 2$, то n се дели на 4. **(5 точки)**

б) Докажете, че ако числото n е степен на двойката с цял положителен показател, то съществува матрица на Адамар от ред n. **(10 точки)**

в) Постройте матрица на Адамар от ред $n = 12$. **(10 точки)**

Задача 2. Стените на три зарчета A, B и C са номерирани с целите числа от 1 до 18; всяко число е използвано веднъж. В множеството $\left\{ A\,,\ B\,,\ C \right\}$ определяме релация "по-силно" по следния начин: казваме, че зарчето x е по-силно от зарчето y, ако при хвърляне на x и y има вероятност над 50% зарчето x да покаже по-голямо число от зарчето y.

За показанията на кои да е две зарчета има общо 36 възможности. Горното определение може да се изкаже така: зарчето x е по-силно от зарчето y, ако показанието на x е по-голямо от показанието на y в поне 19 от всичките 36 възможности.

На различни номерации на стените съответстват различни релации. Има ли номерация (с целите числа от 1 до 18, използвани всяко по веднъж), чиято съответна релация "по-силно" е нетранзитивна?

Задача 3. Както е известно, множеството $2^{\mathbb{N}}$ от всички подмножества на $\mathbb{N}$ е неизброимо. А какво е множеството от всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$ — изброимо или неизброимо?

Задача 4. Постройте строга линейна наредба в множеството на полиномите с две променливи и с цели коефициенти.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Ако в някоя матрица на Адамар сменим знаците на всички елементи от произволен стълб, то се получава пак матрица на Адамар. Следователно можем да предполагаме без ограничение, че всички елементи в първия ред са равни на $+1$. В другите редове (има такива, защото $n > 2$) половината елементи са равни на $+1$, а останалите елементи са равни на -1. Поради това редът n на матрицата е четно число.

Ако разместим стълбовете на една матрица на Адамар, получава се пак матрица на Адамар. Затова можем да предполагаме без ограничение на общността на разсъжденията, че в ред № 2 първите $\frac{n}{2}$ елемента са положителни, а останалите $\frac{n}{2}$ елемента са отрицателни.

Тъй като $n > 2$, то в матрицата съществува ред № 3. Нека

$x =$ броят на положителните числа в първата половина на третия ред;
$y =$ броят на отрицателните числа в първата половина на третия ред;
$z =$ броят на положителните числа във втората половина на третия ред;
$t =$ броят на отрицателните числа във втората половина на третия ред.

Тези четири неизвестни удовлетворяват следната система от линейни уравнения:

$$\left| \begin{aligned} x + y &= \frac{n}{2} \\ z + t &= \frac{n}{2} \\ y + t &= \frac{n}{2} \\ y + z &= \frac{n}{2} \cdot \end{aligned} \right.$$

Първото и второто уравнение се получават от общия брой елементи в двете половини на ред № 3. Третото и четвъртото уравнение казват, че ред № 3 се различава съответно от редове № 1 и № 2 точно в половината позиции.

Решението на системата е $x = y = z = t = \frac{n}{4} \cdot$

Тъй като x, y, z и t са цели числа, то n се дели на 4.

б) Матрица на Адамар от ред, който е степен на двойката с цял положителен показател, може да се построи чрез индукция по степенния показател. Методът е предложен от Силвестър.

База: Матрица на Адамар от втори ред: $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$.

Индуктивна стъпка: Ако A е матрица на Адамар от ред 2^k, то $\left(\begin{array}{c|c} +A & +A \\ \hline +A & -A \end{array}\right)$ е матрица на Адамар от ред 2^{k+1}.

Твърдението може да се докаже, като се изберат два произволни реда от новата матрица и се разгледат няколко случая:

— двата реда са от горната половина;

— двата реда са от долната половина;

— двата реда са от различни половини.

Описанието на разсъжденията се облекчава значително, ако бъде използвана операцията умножение на матрици.

в) Матрица на Адамар от ред 12:

$$
\begin{pmatrix}
+1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\
+1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
+1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\
+1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\
+1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\
+1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\
-1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\
-1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\
-1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\
-1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\
-1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\
-1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1
\end{pmatrix}.
$$

Матриците на Адамар имат различни приложения:
— в теорията на кодирането — за поправяне на грешки от шум в комуникационна линия;
— в статистиката — при т. нар. планиране на експеримента;
— при квантовите компютри;
и др.

Задача 2. Примерна номерация на стените на три зарчета с нетранзитивна релация "по-силно":

A:	3,	4,	11,	12,	13,	14;
B:	1,	2,	9,	10,	17,	18;
C:	5,	6,	7,	8,	15,	16.

Не е трудно да се провери, че зарчето A показва по-голямо число от B в 20 от 36 случая, затова A е по-силно от B. Аналогично, B е по-силно от C и C е по-силно от A. Тоест при тази номерация се получава нетранзитивна релация "по-силно".

Този резултат е доста изненадващ. Повечето хора смятат, че всяко зарче притежава някакво количество "сила", в смисъл че на по-силно зарче съответства по-голяма сила. Всъщност не е възможно да се определи силата на зарчетата като тяхно числово свойство, защото релацията "по-голямо" между числа е транзитивна.

Положението е коренно различно при релации като "по-висок", "по-тежък", "по-стар" и др. Те са транзитивни, защото се свеждат до числови съотношения между съответните величини — височина, тегло, възраст и т.н.

С този комплект от зарчета можем да победим (в дълга игра) всеки неосведомен противник. Нещо повече, оставяме противника първи да си избере зарче, което създава у него впечатлението, че той има предимство. В действителност е точно обратното — предимството е на наша страна: ако противникът избере зарчето C, ние избираме B; ако противникът избере B, ние избираме A; ако противникът избере A, ние избираме C.

Задача 3. Нека A е множеството на всички крайни подмножества на $\mathbb{N} = \left\{ 0 \,,\, 1 \,,\, 2 \,,\, 3 \,,\, \dots \right\}$. За всяко множество $X \in A$ определяме

$$f\,(X) = \sum_{n \,\in\, X} 2^{\,n}.$$

Така например, $f\,(\varnothing) = 0$ е празната сума, а $f\left(\left\{0\right\}\right) = 2^{\,0} = 1$ е сбор от едно събираемо; $f\left(\left\{ 1 \,,\, 2 \,,\, 5 \right\}\right) = 2^{\,1} + 2^{\,2} + 2^{\,5} = 38$.

Функцията f е от вида $f \,:\, A \to \mathbb{N}$. Тя е биекция, защото всяко естествено число може да се представи по единствен начин като сбор от степени на двойката, две по две различни. Затова множествата A и $\mathbb{N}$ са равномощни, откъдето следва, че множеството A е изброимо.

Задача 4. Първо подреждаме двойките от индекси на коефициентите: по-напред са двойките с по-малък сбор; от две двойки с еднакъв сбор по-напред е тази, чийто втори елемент е по-малък.

Подреждаме членовете на всеки полином според въведената наредба на двойките индекси:

$$f(x\,,\,y) \;=\; \sum_{(\,i\;,\;j\,)} a_{ij}\, x^{\,i}\, y^{\,j} \;=\; a_{00} \,+\, a_{10}\, x \,+\, a_{01}\, y \,+\, a_{20}\, x^2 \,+\, a_{11}\, xy \,+\, a_{02}\, y^2 \,+\, \cdots$$

Тази сума е безкрайна, но от известно място нататък всички коефициенти са нули.

Подреждаме полиномите лексикографски: по-малък е полиномът с по-малък свободен член; ако свободните членове са равни, сравняваме коефициентите пред първите степени на x; ако и те са равни, сравняваме коефициентите пред първите степени на y; и тъй нататък, докато попаднем на различни коефициенти с еднакви индекси.

Не е трудно да се провери, че така дефинираната релация между полиноми е транзитивна, антирефлексивна и силно антисиметрична; тоест тя е релация на строга линейна наредба.