Контролно по Дискретни структури, 01.12.2019г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Общо |
|---|---|---|---|---|---|---|
| получени точки | | | | | | |
| максимум точки | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 30 |

**Задача 1.** Докажете, че за всяко естествено $n > 0$ е вярно равенството:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

**Задача 2.** Всяка точка в пространството $\mathbb{R}^3$ е оцветена в синьо, червено, или жълто. Докажете, че както и да са оцветени точките, за всяко $r > 0$ съществуват две едноцветни точки на разстояние, равно на $r$.

*Упътване:* Използвайте принципа на Дирихле.

**Задача 3.** Дадени са два квадрата, с дължини на страните съответно 1 см и 3 см. Постройте биекция между точките от вътрешността на двата квадрата.

**Задача 4.** На планетата Тралфамадор[1] се играе хазартна игра, като играчите хвърлят 3 зарчета на всеки ход. Зарчето има 12 страни [2], на които са обозначени от една до 12 точки.

Комбинация на зарчетата наричаме тройката числа, която съответства на броя на точките върху горната страна на падналите зарчета. Както и на Земята, редът на числата няма значение, тоест тройките $(2, 7, 11)$ и $(11, 2, 7)$ представят една комбинация.

Колко са възможните комбинации при хвърляне на зарчета на Тралфамадор?

**Задача 5.** Нека $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 5\}$, а $R \subseteq A \times A$ е релация, определена така:

$R = \{(x, y) | x - y \in \mathbb{Z}\}$

(a - 3 точки) – Докажете, че $R$ е релация на еквивалентност. Опишете класа $[\sqrt{2}]$.

(b - 3 точки) – Докажете, че множеството от класове на еквивалентност спрямо $R$ е неизброимо.

[1] *от Уикипедия:*

Тралфамадор е родната планета на извънземните пришълци в някои от романите на Кърт Вонегът.

Детайлите за жителите и се променят от роман в роман.

В 'Кланица-5' те са същества, които съществуват паралелно във всички времеви точки. Така те са привилегировани да познават бъдещи събития, включително виждат разрушаването на Вселената, когато Тралфамадорски пилот-изпитател изпробва нов модел двигател за космически кораб. Те отвличат героя на романа Били Пилгрим и го затварят в прозрачна клетка в зоопарка на Тралфамадор заедно с отвлечена известна земна порноактриса.

В 'Сирените на Титан' Тралфамадор е родина на цивилизация от роботи, които изпращат своя пратеник Сало да отнесе послание към обитателите на далечна галактика. След повреда на кораба му, Сало е принуден да кацне на Титан, спътник на Сатурн, и там изчаква пристигането на необходимата му резервна част. Посредник при доставката е земният жител Уинстън Найлс Ръмфорд. Сало съществува и се движи по нормалните физически закони, докато Ръмфорд и кучето му са размити във времето, подобно на тралфамадорците в 'Кланица-5'.

В 'Бога да Ви поживи, мистър Розуотър' се описва еволюцията на планетата. Когато технологииите на Тралфамадор се развили достатъчно, нормалните живи същества, подобни на нас, хората, постепенно били изместени от машини-роботи, толкова съвършени, че за жителите на Тралфамадор животът загубил смисъла си и те се самоубили масово.

[2] Зарчето е с форма на додекаедър – многостен с 12 правилни петоъгълника за стени.

**Примерни решения:**

**Задача 1.** Тривиална индукция.

**Задача 2.** Да разгледаме правилен тетраедър с дължина на ръба $r$. Четирите върха на тетраедъра са оцветени в три цвята.

От принципа на Дирихле следва, че поне два върха са оцветени в един и същи цвят. Разстоянието между тях е $r$, това решава задачата.

**Задача 3.** Разполагаме двата квадрата така, че единият им връх е в началото на координатната система, в точка $(0, 0)$, а диагонално противоположният връх е съответно в точки $(1, 1)$ и $(3, 3)$.

Една възможна биекция от малкия към големия квадрат е $f(x, y) = (3x, 3y)$.

**Задача 4.** Търсим конфигурации без наредба, с повтаряне. Всяко хвърляне на зарче е избор на число от множеството $\{1, 2 \dots 12\}$. Избираме 3 пъти, като можем да повторим избора (да хвърлим 2 или 3 еднакви зара).

Общата формула за избор на $k$ елемента от множество с $n$ елемента е $\binom{n+k-1}{k}$. В задачата $k = 3$, а $n = 12$.

Броят комбинации е $\binom{12+3-1}{3} = \binom{14}{3} = 14.13.2 = 364$.

**Задача 5.** Проверката, че $R$ е релация на еквивалентност е тривиална.

(a) $[\sqrt{2}] = \{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 3\}$

(b) Нека $x > y$ са числа в интервала $(0, 1)$. Тъй като разликата им $0 < x - y < 1$ не е цяло число, те пораждат различни класове на еквивалентност.

Следователно, класовете са поне колкото са числата от интервала $(0, 1)$, а на лекции сме показали, че последните образуват неизброимо множество.