Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2019/2020 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Общо
получени точки						
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Докажете тъждеството

$$\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots\right]^2 = 2^n.$$

Задача 2. Намерете броя на редиците, съставени от a_1 единици, a_2 двойки, ... , a_n числа n, които удовлетворяват следните изисквания: за всяка двойка някъде вляво от нея има единица, за всяка тройка някъде вляво от нея има двойка, ... , за всяко n някъде вляво от него има $n-1$.

Задача 3. Разглеждаме системата от автобусни линии в някакъв град. Известно е, че в града има поне две линии и всеки две линии имат точно една обща спирка. Между всеки две спирки може да се пътува без прекачване по точно една линия. На всяка линия има точно n спирки, като $n \geq 2$. Колко са автобусните линии?

Задача 4. Нека $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... е редицата от простите числа. За всяко цяло положително n означаваме с $\pi(n)$ броя на простите числа, ненадхвърлящи n. Разглеждаме формулата

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + \sum (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_k}} \right\rfloor,$$

където сумирането е по подмножествата $\left\{ j_1, j_2, \ldots, j_k \right\}$ на $\left\{ 1, 2, \ldots, \pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) \right\}$ и k се мени от 1 до $\pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)$.

а) Проверете формулата при $n = 120$. **(5 точки)**

б) Докажете формулата за всяко цяло положително n. **(15 точки)**

Задача 5. Точките с целочислени координати в равнината са оцветени с краен брой цветове. Докажете, че съществува правоъгълник с едноцветни върхове измежду тези точки.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. В биномната формула на Нютон

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 + \binom{n}{5} x^5 + \binom{n}{6} x^6 + \binom{n}{7} x^7 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

полагаме $x = i$ (имагинерната единица):

$$(1+i)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \binom{n}{3} i^3 + \binom{n}{4} i^4 + \binom{n}{5} i^5 + \binom{n}{6} i^6 + \binom{n}{7} i^7 + \cdots + \binom{n}{n} i^n.$$

Степените на имагинерната единица имат период 4:

$$\begin{aligned} 1 &= i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots \\ i &= i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots \\ -1 &= i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \cdots \\ -i &= i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \cdots \end{aligned}$$

Получаваме

$$(1+i)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} i - \binom{n}{6} - \binom{n}{7} i + \cdots$$

Отделяме реалната от имагинерната част:

$$(1+i)^n = \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots\right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots\right].$$

Следователно

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots \quad \text{и} \quad \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$

са съответно реалната и имагинерната част на комплексното число $(1+i)^n$. Както е известно, сборът от квадратите на реалната и имагинерната част е равен на квадрата на модула, тоест

$$\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots\right]^2 =$$

$$= \left|(1+i)^n\right|^2 = \left[\left|1+i\right|^n\right]^2 = \left|1+i\right|^{2n} = \left[\left|1+i\right|^2\right]^n = \left(1^2+1^2\right)^n = 2^n.$$

Задача 2. Редицата се състои от $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ члена. Заделяме толкова на брой места и ги попълваме по следния начин.

На първото място пишем единица, защото всяко друго число изисква някъде вляво от него да има по-малко от него число, а няма места наляво от началото на редицата. Само единиците не поставят такова изискване, тоест само те не създават проблем, ако бъдат сложени в началото. Затова на първото място пишем единица.

Другите $a_1 - 1$ единици слагаме произволно на останалите $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1$ места. Местата на единиците избираме без определен ред (все едно е дали ще кажем, че има единици например на осмото и десетото място, или ще кажем, че има единици на десетото и осмото място). Освен това избираме различни места, защото не може две единици да заемат едно и също място. Следователно работим с *комбинации без повторение*.

И така, останалите единици можем да разположим по

$$C_{a_1+a_2+\cdots+a_n-1}^{a_1-1} = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)!}{(a_1-1)!\ (a_2+\cdots+a_n)!} \text{ начина.}$$

На първото свободно място слагаме двойка. Имаме право, защото наляво от това място се намира поне една единица — първият член на редицата. На първото свободно място не можем да сложим единица, понеже единиците свършиха. Не можем да сложим тройка, защото наляво няма двойки (има само единици). Не можем да сложим четворка: наляво няма тройки. И тъй нататък: на въпросното място не можем да сложим никакво друго число освен двойка.

Другите a_2-1 двойки слагаме произволно на останалите $a_2+a_3+\cdots+a_n-1$ места. Можем да направим това по

$$C_{a_2+a_3+\cdots+a_n-1}^{a_2-1} = \frac{(a_2+a_3+\cdots+a_n-1)!}{(a_2-1)!\ (a_3+\cdots+a_n)!} \text{ начина.}$$

Аналогично се доказва, че на първото свободно място е задължително да стои тройка. Другите a_3-1 тройки разполагаме произволно на останалите $a_3+a_4+\cdots+a_n-1$ места. Можем да направим това по

$$C_{a_3+a_4+\cdots+a_n-1}^{a_3-1} = \frac{(a_3+a_4+\cdots+a_n-1)!}{(a_3-1)!\ (a_4+\cdots+a_n)!} \text{ начина.}$$

Продължаваме тази верига от еднотипни разсъждения, докато изчерпим всички числа до $n-1$ включително. Числата n записваме на останалите a_n места по единствен начин, с което е завършено построението на редицата.

Броя на всички възможни редици намираме с помощта на правилото за умножение:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)!}{(a_1-1)!\ (a_2+\cdots+a_n)!} \cdot \frac{(a_2+a_3+\cdots+a_n-1)!}{(a_2-1)!\ (a_3+\cdots+a_n)!} \cdots \frac{(a_{n-1}+a_n-1)!}{(a_{n-1}-1)!\ a_n!}\,.$$

Всеки числител (без първия) съкращаваме с втория множител от предходния знаменател:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)!}{(a_1-1)!\ (a_2+\cdots+a_n)} \cdot \frac{1}{(a_2-1)!\ (a_3+\cdots+a_n)} \cdots \frac{1}{(a_{n-1}-1)!\ a_n!}\,.$$

Окончателно, броят на редиците е равен на

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-1)!}{(a_1-1)!\ (a_2-1)!\ \cdots\ (a_{n-1}-1)!\ a_n!\ (a_2+\cdots+a_n)\ (a_3+\cdots+a_n)\ \cdots\ (a_{n-1}+a_n)}\,.$$

Задачата е съчинена от Raphael Robinson.

Задача 3. Разделяме решението на стъпки.

Лема 1: За всяка спирка съществува автобусна линия, неминаваща през спирката.

Доказателство: Да допуснем противното — че през някоя спирка S преминават всички автобусни линии в града. По условие има поне две такива линии, да ги означим с L_1 и L_2. Всяка от тях преминава през най-малко две спирки, затова L_1 минава през някоя спирка $A \neq S$, а L_2 минава през някоя спирка $B \neq S$. Тъй като всеки две линии имат точно една обща спирка и S е обща спирка за L_1 и L_2, то L_1 не минава през B, а L_2 не минава през A. Обаче L_1 минава през A, ето защо A и B са различни спирки. Тогава те са свързани от някоя линия L; тя е различна от L_1 и L_2, защото всяка от тях минава само през едната от спирките A и B. L и L_1 имат само една обща спирка — A, затова L не минава през S. ■

Лема 2: През всяка спирка минават точно n автобусни линии.

Доказателство: Нека S е някоя спирка. Според лема 1 съществува автобусна линия L, неминаваща през S. По условие L минава през точно n спирки A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Всички те са различни от S, защото L минава през тях, но не и през S. Тогава за всяко k от 1 до n вкл. съществува автобусна линия L_k, свързваща спирките A_k и S. Тези линии са различни от L, защото те минават през спирката S, а L — не.

Тези линии са две по две различни. Да допуснем противното — че линията L_i съвпада с L_j за някои различни i и j. Тогава тази линия (тя е различна от L) има поне две общи спирки с линията L — спирките A_i и A_j, което противоречи на условието.

Дотук доказахме, че през спирката S минават поне n автобусни линии. Нека допуснем, че през S минават поне $n+1$ линии. Те са различни от L, защото L не минава през S. Затова всяка от тях има обща спирка с L. По условие линията L минава през точно n спирки. От принципа на Дирихле следва, че поне две от линиите през S имат една и съща обща спирка с линията L. Тази спирка и спирката S са различни (защото L не минава през S) и са общи за двете споменати линии. Тоест те имат поне две общи спирки, което противоречи на условието на задачата. Следователно допускането не е вярно, тоест през S минават не повече от n линии.

Окончателно, през S минават точно n линии. Но спирката S беше избрана произволно, затова през всяка спирка минават точно n автобусни линии. ■

С помощта на лема 2 ще намерим броя на автобусните линии. Нека в града има b спирки и a автобусни линии. Понеже всеки две спирки са свързани с единствена автобусна линия, то броят на линиите би трябвало да е равен на C_b^2. Но всяка автобусна линия минава през точно n спирки, затова е броена C_n^2 пъти, така че действителният брой на линиите е C_n^2 пъти по-малък от посочената стойност, тоест

$$a = \frac{C_b^2}{C_n^2} \iff aC_n^2 = C_b^2 \iff a\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{b(b-1)}{2} \iff an(n-1) = b(b-1).$$

Аналогично, всеки две линии имат обща спирка, затова броят на спирките би трябвало да е равен на C_a^2. В действителност този брой е C_n^2 пъти по-малък, тъй като според лема 2 през всяка спирка минават точно n линии, затова всяка спирка е броена C_n^2 пъти. Следователно

$$b = \frac{C_a^2}{C_n^2} \iff bC_n^2 = C_a^2 \iff b\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{a(a-1)}{2} \iff bn(n-1) = a(a-1).$$

Делим първото уравнение на второто:

$$\frac{an(n-1)}{bn(n-1)} = \frac{b(b-1)}{a(a-1)} \iff \frac{a}{b} = \frac{b(b-1)}{a(a-1)} \iff a^2(a-1) = b^2(b-1) \iff a^3-a^2 = b^3-b^2$$

$$\iff \Bigl(a^3-b^3\Bigr) - \Bigl(a^2-b^2\Bigr) = 0 \iff \Bigl(a-b\Bigr)\Bigl(a^2+ab+b^2\Bigr) - \Bigl(a-b\Bigr)\Bigl(a+b\Bigr) = 0 \iff$$

$$\iff \Bigl(a-b\Bigr)\Bigl(a^2+ab+b^2-a-b\Bigr) = 0.$$

Понеже a и b са цели положителни числа, то $ab > 0$, $a^2 \geq a$ и $b^2 \geq b$. Следователно изразът във вторите скоби е положително число. Затова уравнението е равносилно на $a-b=0$, тоест $a=b$. С други думи, броят на спирките е равен на броя на автобусните линии.

В уравнението $bn(n-1) = a(a-1)$ заместваме $b=a$ и получаваме $an(n-1) = a(a-1)$. Съкращаваме на $a > 0$ и намираме $n(n-1) = a-1$, тоест $a = n^2-n+1$. Това число е броят на автобусните линии в града.

Задача 4.

а) Ако $n = 120$, то $100 < n < 121$, следователно $10 < \sqrt{n} < 11$, откъдето $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 10$. Тогава $\pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) = \pi(10) = 4$, защото от 1 до 10 включително има четири прости числа: 2, 3, 5 и 7. Заместваме във формулата:

$$\pi(120) = 120 - 1 + \pi(10) - \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,7} \right\rfloor$$

$$+ \left\lfloor \frac{120}{3\,.\,5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{3\,.\,7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{5\,.\,7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,3\,.\,5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,3\,.\,7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,5\,.\,7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{3\,.\,5\,.\,7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2\,.\,3\,.\,5\,.\,7} \right\rfloor$$

$= 120 - 1 + 4 - 60 - 40 - 24 - 17 + 20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3 - 4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 30$, тоест според формулата има трийсет прости числа от 1 до 120 включително. Проверката показва, че действително са толкова; това са числата 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

б) Нека m е съставно число. Тогава $m = ab$ за някакви цели положителни числа a и b, като $1 < a < m$ и $1 < b < m$. Без ограничение нека $a \leq b$. Следователно $a^2 \leq ab = m$, откъдето $a \leq \sqrt{m}$, тоест $a \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. От $a > 1$ следва, че a има някакъв прост делител p (който може да съвпада с a). Тогава $p \leq a \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, тоест $p \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. Освен това, тъй като p дели a и a дели m, то p дели m.

И тъй, всяко съставно число m има прост делител $p \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. Ако $m \leq n$, то $\sqrt{m} \leq \sqrt{n}$, затова $p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, тоест p е някое от числата p_1, p_2, …, $p_{\pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)}$.

За всяко $j = 1, 2, \ldots, \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right)$ означаваме с A_j множеството на целите числа между 1 и n включително, които се делят на p_j. От току-що доказаното следва, че обединението $\bigcup\limits_j A_j$ съдържа простите числа p_1, p_2, …, $p_{\pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)}$ и съставните числа от 1 до n включително. Следователно броят на тези съставни числа е равен на

$$\left| \bigcup_j A_j \right| - \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right).$$

Ако към тази бройка прибавим броя $\pi(n)$ на простите числа от 1 до n, ще получим $n - 1$, тоест броя на всички цели числа от 2 до n включително (единицата не се брои, тъй като тя не е нито просто, нито съставно число). Записано с формула, това разсъждение изглежда така:

$$\left| \bigcup_j A_j \right| - \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + \pi(n) = n - 1,$$

откъдето намираме

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) - \left| \bigcup_j A_j \right|.$$

От принципа за включване и изключване

$$\left| \bigcup_j A_j \right| = \sum (-1)^{k+1} \left| A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k} \right|$$

заместваме мощността на обединението в предишната формула:

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) - \sum (-1)^{k+1} \left| A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k} \right|,$$

тоест

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + \sum (-1)^{k} \left| A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k} \right|.$$

Сечението $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}$ се състои от целите числа между 1 и n включително, които се делят на всяко от простите числа $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_k}$, а значи и на тяхното най-малко общо кратно $p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_k}$. Затова

$$\left| A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k} \right| = \left\lfloor \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_k}} \right\rfloor .$$

Заместваме в предишната формула и получаваме:

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + \sum (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_k}} \right\rfloor ,$$

което трябваше да се докаже.

Задача 5. Означаваме с n броя на цветовете. Разглеждаме онези точки (x, y) в равнината, чиито координати x и y са цели числа и $1 \leq x \leq n^{n+1} + 1$, $1 \leq y \leq n + 1$. Те образуват правоъгълна таблица, x е номер на стълб, y е номер на ред. Всеки стълб съдържа $n+1$ точки, всяка от които може да бъде оцветена в един от n цвята. От правилото за умножение следва, че всеки стълб може да бъде оцветен по n^{n+1} различни начина. Стълбовете са $n^{n+1}+1$ на брой, затова от принципа на Дирихле следва, че съществуват поне два еднакво оцветени стълба. Нека техните номера са x_1 и x_2.

Да разгледаме стълба с номер x_1. Той се състои от $n + 1$ точки, а цветовете са само n. Пак от принципа на Дирихле стигаме до извода, че някои две от тези точки са едноцветни. Нека y_1 и y_2 са номерата на редовете на тези две точки. Понеже стълбът с номер x_2 е оцветен като стълба с номер x_1, то точките (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) и (x_2, y_2) са едноцветни. Тези четири точки са върховете на търсения правоъгълник.