Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток – СУ "Св. Климент Охридски", ФМИ, 14 декември 2019 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Задача 1. Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворява равенството $f(f(f(n))) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следва ли, че f е биекция?

Задача 2. Определяме нова аритметична операция — стълбичка от степени: $a \uparrow b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, където b е броят на числата a. Стълбичките от степени се изчисляват отгоре надолу, например $2 \uparrow 4 = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16} = 65536$. Да се докаже, че $2 \uparrow n < 3 \uparrow (n-1)$ за всяко цяло число $n \geq 3$.

Задача 3. Правоъгълник е разделен с отвесни и водоравни линии на единични квадратчета, разположени в m реда и n стълба. Колко правоъгълника съдържа полученият чертеж? Брои се и първоначалният правоъгълник. Квадрати с всякакви размери също се броят за правоъгълници. Всеки правоъгълник трябва да притежава положителна дължина и положителна ширина, тоест отсечките и точките не се смятат за правоъгълници. Отговорът да се опрости докрай!

Задача 4. Да означим с $\mathcal{M}$ множеството от всички държави. Бинарната релация $\rho \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ е дефинирана така:

$\forall A \in \mathcal{M}\,,\ \forall B \in \mathcal{M}:\ A\,\rho\,B$ тогава и само тогава, когато
границата на държавата A и границата на държавата B имат общ участък.

В това определение A и B могат да бъдат различни държави или една и съща държава.

Докажете или опровергайте, че ρ е релация на еквивалентност.

Ако ρ е релация на еквивалентност, обяснете кои са нейните класове на еквивалентност.

Всички разсъждения да бъдат описани словесно и онагледени с чертежи.

Задача 5. Изразете включващата дизюнкция само чрез логическата операция импликация. С други думи, съставете логически израз, който съдържа само променливите p и q, скоби и операцията импликация (един или повече пъти) и е еквивалентен на израза $p \vee q$.

Задача 6. По колко начина могат да застанат в редица n семейни двойки, ако хората от никоя семейна двойка не бива да са съседи в редицата?

Достатъчен е отговор във вид на алгебрична сума. Опростяването му до затворена формула (с помощта на приближения) носи допълнителни 10 точки.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да, следва, че функцията f е биекция. Първо, тя е сюрекция, защото всяко $n \in \mathbb{N}$ има поне един първообраз $m \in \mathbb{N}$, а именно $m = f(f(n))$. Действително, $f(m) = f(f(f(n))) = n$. А пък от $f(n_1) = f(n_2)$ следва, че $f(f(f(n_1))) = f(f(f(n_2)))$, тоест $n_1 = n_2$, което означава, че f е инекция. Щом функцията f е инекция и сюрекция, то тя е биекция.

Тази задача е предложена от Емилиян Рогачев.

Задача 2. За да докажем, че $2 \uparrow n < 3 \uparrow (n-1)$ за всяко цяло число $n \geq 3$, ще използваме математическа индукция.

База: $n = 3$. Тогава неравенството приема вида $2 \uparrow 3 < 3 \uparrow 2 \iff 2^{2^{2}} < 3^{3} \iff 16 < 27$, което е очевидно вярно.

Индуктивна стъпка: Нека $n \geq 4$ и е изпълнено неравенството $2 \uparrow (n-1) < 3 \uparrow (n-2)$. Ще докажем, че $2 \uparrow n < 3 \uparrow (n-1)$. За целта използваме едно свойство на реалните числа:

$$\text{Ако } 1 < x < y \text{ и } 0 < z < t \text{ то } x^{z} < y^{t}.$$

Прилагаме свойството към следните реални числа: $x = 2$, $y = 3$, $z = 2 \uparrow (n-1)$ и $t = 3 \uparrow (n-2)$. Неравенствата $1 < x < y$ и $0 < z$ са очевидно верни, а пък неравенството $z < t$ е изпълнено съгласно с индуктивното предположение. Въз основа на цитираното свойство заключаваме, че $x^{z} < y^{t}$, тоест $2^{2 \uparrow (n-1)} < 3^{3 \uparrow (n-2)}$. Последното неравенство е равносилно на $2 \uparrow n < 3 \uparrow (n-1)$, което трябваше да се докаже.

Тази задача е била дадена на XXXVIII Московска олимпиада по математика през 1975 г.

Задача 3. Всеки правоъгълник се определя еднозначно от най-левия стълб, най-десния стълб, най-горния ред и най-долния ред.

За най-горен и най-долен ред на някой правоъгълник можем да изберем кои да е два реда от всичките m. Последователността на избирането им няма значение: по-горният ще е капак, а по-долният — дъно на правоъгълника. Щом последователността на избирането няма значение, то начините за избиране на два реда са *комбинации*. Понеже правоъгълникът може да съдържа и само един ред, тоест може капакът и дъното да съвпадат, то имаме *комбинации с повторение*. Иначе казано, можем да изберем най-горния и най-долния ред на правоъгълника по $\widetilde{C}_m^{\,2}$ начина.

Аналогично, най-левия и най-десния стълб можем да изберем по $\widetilde{C}_n^{\,2}$ начина.

Всеки избор на най-горен и най-долен ред на правоъгълник се съчетава с всеки избор на най-ляв и най-десен стълб. Намираме броя на правоъгълниците от правилото за умножение:
$$\widetilde{C}_m^{\,2}\,\widetilde{C}_n^{\,2} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}.$$

Задача 4. Релацията ρ не е транзитивна, затова не е релация на еквивалентност. Например Румъния и България имат обща граница, България и Гърция също имат обща граница, обаче Румъния и Гърция нямат обща граница.

Да отбележим (това не е задължително), че релацията ρ е рефлексивна и симетрична.

Задача 5. $p \vee q \equiv (p \to q) \to q$. Доказва се например чрез табличния метод.

Задача 6. Редиците от хора са *пермутации без повторение*, тъй като хората са различни. Затова има общо $P_n = (2n)!$ редици — такива, в които е спазено изискването за съседните места, и такива, в които то е нарушено. По-лесно е да преброим редиците, нарушаващи изискването. Номерираме семейните двойки с целите числа от 1 до n вкл. Нека A_j е множеството от редиците, в които хората от семейната двойка № j заемат съседни места, $j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$.

Обединението на тези множества се състои от редиците, в които поне една семейна двойка заема съседни места. Броя на редиците намираме чрез принципа за включване и изключване:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right| + \cdots + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Сечението на k избрани множества се състои от редиците, в които членовете на всяка от k избрани семейни двойки стоят на съседни места. (Членовете на останалите семейни двойки могат да заемат както съседни, така и несъседни места.) Броя на тези редици пресмятаме така: разглеждаме всяка от избраните k семейни двойки като един пакет, при което тези k пакета и останалите $2n-2k$ човека се разместват по $P_{k+(2n-2k)} = P_{2n-k} = (2n-k)!$ начина, членовете на всеки пакет се разместват по два начина вътре в пакета, общо 2^k начина за всички пакети; така броят на редиците е равен на $(2n-k)!\,2^k$.

Този брой не зависи от избора на "пакетираните" семейни двойки, затова k-тата сума се състои от равни събираеми. Броят на събираемите е равен на броя на начините, по които можем да изберем k от общо n семейни двойки; това са *комбинации без повторения* и броят им е $C_n^k = \binom{n}{k}$. Тогава k-тата сума е равна на $(2n-k)!\binom{n}{k}2^k$ и равенството по-горе приема вида:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2n-k)!\binom{n}{k}2^k = -\sum_{k=1}^{n}(2n-k)!\binom{n}{k}(-2)^k.$$

Това е броят на редиците, нарушаващи изискването от условието на задачата. Като ги извадим от множеството на всичките $(2n)!$ редици, остават онези, които изпълняват изискването:

$$(2n)! + \sum_{k=1}^{n}(2n-k)!\binom{n}{k}(-2)^k = \sum_{k=0}^{n}(2n-k)!\binom{n}{k}(-2)^k.$$

Последната сума е търсеното число — броят на редиците, в които хората от никоя семейна двойка не стоят на съседни места.

Получения отговор можем да опростим, като изнесем един множител $(2n)!$ пред сумата: така ще остане вероятността случайно избрано подреждане да удовлетворява изискването.

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-k)!\binom{n}{k}(-2)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!\,n!}{k!\,(n-k)!}(-2)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{(2n-k)!\,n!}{(n-k)!} =$$

$$= (2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{(2n-k)!}{(2n)!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!} = (2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-k+1)} =$$

$$= (2n)!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2)^k}{k!}\prod_{p=0}^{k-1}\frac{n-p}{2n-p}\right).$$ Можем да опростим последния израз само приблизително, като приближението ще важи при големи n. Тъй като знаменателят $k!$ расте много бързо, то на големите k съответстват незначителни събираеми. Затова е достатъчно да разгледаме само случая, когато k е малко число. Понеже $0 \le p \le k-1$, то числото p също е малко, тоест p е много по-малко от n. Ето защо са в сила следните приближения: $n-p \approx n$, $2n-p \approx 2n$ и $\dfrac{n-p}{2n-p} \approx \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Заместваме в последната сума и намираме приблизителната ѝ стойност:

$$(2n)!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2)^k}{k!}\prod_{p=0}^{k-1}\frac{n-p}{2n-p}\right) \approx (2n)!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2)^k}{k!}\prod_{p=0}^{k-1}\frac{1}{2}\right) = (2n)!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2)^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) =$$

$$= (2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx (2n)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = (2n)!\,e^{-1} \approx (2n)!\,0,37.$$ Полученият резултат означава, че ако броят на семейните двойки е голямо число, то около 37% от всички възможни редици не съдържат на съседни места хора от никоя семейна двойка.