С Ъ С Т А В Я Н Е Н А А Л Г О Р И Т М И
ДОМАШНО № 1 ПО “ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ” ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, 1. ПОТОК (СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2019 / 2020 УЧ. Г.)

Задача 1. Нека първо сортираме всеки ред, а после — всеки стълб на числова матрица. Докажете, че в крайна сметка редовете ще останат сортирани. **(2 точки)**

Задача 2. Две машини — клиент и сървър — са свързани с бавна комуникационна линия. На сървъра се пази полином $P(x)$ с цели неотрицателни коефициенти. Клиентът може да изпраща към сървъра заявки. Всяка заявка се състои от едно цяло неотрицателно число x. Отговорът на заявката е едно цяло неотрицателно число $y = P(x)$. Колко най-малко заявки са нужни на клиента в най-лошия случай, за да узнае полинома $P(x)$, тоест да узнае степента и коефициентите на полинома? **(4 точки)**

Задача 3. На конференция по химия присъстват n учени, някои от които са химици, а другите — алхимици. Химиците винаги казват истината, а алхимиците понякога лъжат. Известно е, че химиците са повече от алхимиците. Вие искате да разберете за всеки учен какъв е — химик или алхимик. Имате право да питате всеки учен за когото и да било, включително за него самия: “Еди-кой си какъв е — химик или алхимик?” (Приемаме, че всеки учен знае какви са колегите му.)

Как можете да постигнете целта си с не повече от $2n - 3$ въпроса? **(4 точки)**

Забележка: При $n = 1$ и при $n = 2$ всички са химици (а при $n = 1$ имаме $2n - 3 < 0$), затова трябва да приемем, че $n \geq 3$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да разгледаме матрицата след сортирането по редове. Нека числата във всеки ред растат отляво надясно. Спираме вниманието си на два съседни стълба — ляв и десен, избрани произволно сред стълбовете на матрицата. Нека b_i означава i-тото най-малко число в десния стълб, а пък a_i означава i-тото най-малко число в левия стълб. По определение в десния стълб има поне $i-1$ числа, ненадвишаващи b_i. Понеже редовете са сортирани, то числата в левия стълб, които лежат в същите $i-1$ реда, са не по-големи от споменатите $i-1$ числа в десния стълб, значи също не надвишават b_i. Числото отляво на b_i също така не надвишава b_i. Ето защо в левия стълб има поне i числа, ненадвишаващи b_i. Следователно i-тото най-малко число в левия стълб е едно от тези i числа, тоест $a_i \leq b_i$.

След сортиране на матрицата по стълбове числото в i-тия ред на всеки стълб е точно i-тото най-малко число в този стълб. Неравенството $a_i \leq b_i$ означава, че i-тият ред остава сортиран (тъй като двата съседни стълба, които разгледахме, бяха избрани произволно). Казаното важи за всяко i, тоест всеки ред остава сортиран.

Задача 2. Най-напред ще докажем, че две заявки стигат. С първата заявка клиентът изпраща числото 1 и получава от сървъра числото $a = \mathrm{P}(1)$, което е сборът от коефициентите на P. Тъй като коефициентите на полинома $\mathrm{P}(x)$ са цели неотрицателни числа, то те са по-малки или равни на a, следователно са по-малки от числото $b = a + 1$. Ако $a = 0$, тоест $b = 1$, то P е нулевият полином; в този случай не е нужна втора заявка. Обаче в общия случай $a > 0$, тоест $b > 1$, и клиентът има нужда от втора заявка.

С втората заявка клиентът изпраща числото b и получава от сървъра числото $N = \mathrm{P}(b)$. Цифрите на числото N, записано в позиционна бройна система с основа b, са коефициентите на полинома P, а степента му е с единица по-малка от броя на цифрите на N.

Пример 1: Нека $\mathrm{P}(x) = 5x^3 + x + 3$. С първата заявка клиентът научава числото $a = \mathrm{P}(1) = 5 \,.\, 1^3 + 1 + 3 = 9$. С втората заявка клиентът изпраща числото $b = a + 1 = 10$ и получава числото $N = \mathrm{P}(10) = 5 \,.\, 10^3 + 10 + 3 = 5013_{(10)}$. Числото N има четири цифри, откъдето клиентът заключава, че полиномът P е от трета степен. Цифрите на числото N, взети в същия ред, са коефициентите на полинома: $\mathrm{P}(x) = 5x^3 + 0x^2 + 1x + 3 = 5x^3 + x + 3$.

Пример 2: Нека $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 4x + 1$. С първата заявка клиентът научава числото $a = \mathrm{P}(1) = 3 \,.\, 1^2 + 4 \,.\, 1 + 1 = 8$. С втората заявка клиентът изпраща числото $b = a + 1 = 9$ и получава числото $N = \mathrm{P}(9) = 3 \,.\, 9^2 + 4 \,.\, 9 + 1 = 341_{(9)}$. Числото N има три цифри, откъдето клиентът заключава, че полиномът P е от втора степен. Цифрите на числото N, взети в същия ред, са коефициентите на полинома: $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

Сега ще докажем, че в общия случай една заявка не е достатъчна. Нека с първата заявка клиентът е изпратил числото w и е получил като отговор числото $q = \mathrm{P}(w)$. Ако $q \geq w$, то съществуват поне два полинома P, които могат да върнат такъв отговор на заявката: $\mathrm{P}_1(x) = q$ за всяко x (тоест първият полином е константа) и $\mathrm{P}_2(x) = x + (q - w)$. Тъй като по отговора на първата заявка клиентът няма как да разбере кой от тези полиноми се пази на сървъра, то следва, че клиентът има нужда от втора заявка.

Ако $q < w$, то полиномът $\mathrm{P}(x)$ съвпада с константата q. Сега не е нужна втора заявка, обаче това е най-добрият, а не най-лошият случай.

Както видяхме, в най-лошия случай са нужни поне две заявки. От друга страна, успяхме да построим алгоритъм, който намира полинома с не повече от две заявки във всички случаи. Окончателно, търсеният най-малък брой заявки е две в най-лошия случай.

Тази задача (без втория етап от решението) е от книгата “Mathematical Mind-Benders” от Peter Winkler.

Задача 3. Тази задача е подобна на задачата за мажорантата. Да номерираме учените на конференцията с целите числа 1, 2, 3, ... , n. За всяко $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ питаме i-ия учен какъв според него е $(i+1)$-ият. Ако отговорът е "химик", продължаваме нататък (увеличаваме i с 1). Ако отговорът е "алхимик", изваждаме i-ия и $(i+1)$-ия учен от редицата, преномерираме следващите ($i+2$ става i, $i+3$ става $i+1$ и т.н.) и намаляваме i с 1, тоест пак питаме $(i-1)$-ия учен за новия му съсед — учения с нов номер i, бивш номер $i+2$.

Когато един учен каже за другиго, че е алхимик, поне един от двамата е алхимик: химикът би казал за друг химик, че е химик. Ето защо във всяка двойка извадени заедно поне единият е алхимик. Тъй като в първоначалното множество химиците са мнозинство, то те са мнозинство и в остатъка след изваждането. Значи, поне един от оставащите е химик.

И така, накрая остава верига, в която всеки е казал за следващия, че е химик. Затова, ако някой от тях е алхимик, то съседът му отляво е излъгал, тоест също е алхимик и т.н.

Накратко, ако във веригата има алхимик, то всички вляво от него (с по-малките номера) също са алхимици. Следователно вдясно от който и да било химик стоят само химици.

Тъй като във веригата има поне един химик, то заключаваме, че последният ѝ член (тоест човекът с най-голям оставащ номер) със сигурност е химик. Ако във веригата има поне двама души, то не само последният, но и предпоследният член на веригата е химик (иначе химиците не биха били повече от алхимиците).

Дотук сме задали $n-1$ въпроса. По-нататък има две възможности.

Първи случай: в оставащата верига има поне двама души. Както вече установихме, последните двама са химици. Питаме един от тях за всеки от другите $n-2$ учени какъв е; така сме сигурни, че получаваме верни отговори.

Въпросите стават общо $(n-1) + (n-2) = 2n-3$.

Втори случай: в оставащата верига има само един човек. Значи той е химик и винаги казва истината. Останалите $n-1$ учени са извадени по двойки. Във всяка от тези двойки поне единият е алхимик. От друга страна, химиците са повече от алхимиците, следователно във всяка двойка само единият е алхимик, а другият е химик.

Достатъчно е да идентифицираме по един човек от всяка двойка. Ще постигнем това, като зададем на единствения човек във веригата още $(n-1)/2$ въпроса — по един въпрос за един учен от всяка двойка (в този случай n е нечетно число). Така въпросите стават общо $(n-1) + (n-1)/2 = 3(n-1)/2 \leq 2n-3$. Последното неравенство е изпълнено при $n \geq 3$.

Забележка: Задачата е дадена на XLII Московска олимпиада по математика през 1979 г. Московският математик П. М. Блехер (победител в 26-ата и 28-ата олимпиада) е доказал, че най-малкият брой въпроси е $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$. Доказателството е публикувано в статията "On a Logical Problem", Discrete Math. 43 (1983), стр. 107–110.

СХЕМА НА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 носи 2 точки.

Задача 2 носи 4 точки — по 2 точки за всеки етап:
— доказателството, че две заявки са достатъчни;
— доказателството, че една заявка не стига за узнаването на полинома.

Задача 3 носи 4 точки — по 1 точка за всеки етап:
— образуването на двойките;
— първия случай;
— втория случай;
— преброяването на въпросите.