ЧМДУ 2018/2019
Финален изпит, част 2

1. Изведете явния метод на Ойлер. Изследвайте го за А-устойчивост.

2. За разширената таблица на Butcher

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/6 & 2/3 \\
 & 1/2 & 1/2 & 0
\end{array}
$$

   изведете метод с адаптивен избор на стъпката.

3. Формулирайте закона на Фик. Изяснете интуитивния му смисъл. Като използвате уравнението на непрекъснатостта, изведете уравнението на дифузията.

4. Постройте явна диференчна схема за диференциалната задача

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,\\
&u(x,0) = u_0(x),\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0.
\end{aligned}
$$

   Изведете условие за устойчивост в $\|\cdot\|_{h,\infty}$-норма.

5. Обосновете, че, ако принципът за максимума е в сила за дадена диференчна схема, то последната е устойчива (по начални данни и гранични условия) в $\|\cdot\|_{h,\infty}$-норма.

6. За граничната задача за ОДУ от втори ред

$$
\begin{aligned}
-u'' + u = x,\ 0 < x < 1,\\
u'(0) = 0,\ u(1) = 0
\end{aligned}
$$

   да се построи диференчна схема с втори ред на сходимост. Да се напише във векторно-матрична форма линейната алгебрична система, която трябва да се реши, за да се получат стойностите на приближеното решение в точките от мрежата.

7. Да се построи метод на крайните елементи за гранична задача

$$-u'' = f$$

   с хомогенни условия на Дирихле.

8. По метода на хармониките изследвайте за устойчивост в $\|\cdot\|_{h,2}$-норма диференчното уравнение

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{y_{k+1}^j - 2y_i^j + y_{k-1}^j}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{y_{k+1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}}{h^2}.$$