Примерни решения на задачите от изпита по ДАА на спец. Инф. и КН, ФМИ-СУ, 26 юли 2020 г.

---

75 т. **Задача.** Даден е неориентиран свързан тегловен граф G с тегловна функция $w : E(G) \to \mathbb{N}^{+}$. Разглеждаме само прости пътища. За всеки път p в G, дължината на p е $\sum_{e \in E(p)} w(e)$. За всеки два върха u, v, разстоянието между u и v, което бележим с $\text{dist}(u, v)$, е дължината на най-къс път между u и v. За всеки връх u, *ексцентрицитетът на* u е

$$\epsilon(u) = \max \{ \text{dist}(u, v) \mid v \in V(G) \}$$

Диаметърът на G е

$$\text{diam}(G) = \max \{ \epsilon(u) \mid u \in V \}$$

Предложете алгоритъм със сложност $O\left(m(\lg n)^5\right)$, който връща число x, такова че

$$\frac{1}{2} \cdot \text{diam}(G) \leq x \leq \text{diam}(G)$$

Може да ползвате наготово алгоритми и резултати от лекции. Допустимо е да опишете алгоритъма на високо ниво, на български език, а не на псевдокод. Обосновете накратко коректността и сложността по време на Вашия алгоритъм.

Решение: Известно е, че неравенството на триъгълника е в сила за обикновени графи (без тегла), в които дължината на път е броят на ребра в него:

$$\forall u, v, w \in V(G) : \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w)$$

Обобщението на неравенството на триъгълника е в сила и за неориентирани тегловни графи с положителни тегла, като записът е абсолютно същият, само че сега дължината на път е сумата от теглата на неговите ребра. Че обобщението на неравенството на триъгълника остава в сила се доказва тривиално: допускането, че $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) < \text{dist}(u, w)$ веднага води до противоречие, понеже слепването на най-къс път между u и v с най-къс път между v и w дава път (не непременно прост) между u и w с дължина, по-малка от $\text{dist}(u, w)$; дори да не е прост, от него може да се "изреже" част, така че той да стане прост, а "изрязването" на ребра с положителни тегла само ще намали дължината му.

И така, обобщението на неравенството на триъгълника е в сила. Да пуснем алгоритъма на Дийкстра от произволен стартов връх s. Алгоритъмът решава задачата за най-късите пътища във варианта от един връх (това е s в случая) до всички останали. Във време $O(m \lg n)$ алгоритъмът изчислява претеглените разстояния до останалите върхове (G е свързан, така че алгоритъмът намира разстоянието до всеки друг връх), ако е реализиран с приоритетна опашка–двоична пирамида. Във време $O(n)$ намираме максимално отдалечен от s връх, да го наречем t.

В общия случай s и t не реализират диаметър помежду си в смисъл, че съществуват върхове x и y, такива че $\text{dist}(x, y) = \text{diam}(G)$ и $\text{dist}(s, t) < \text{dist}(x, y)$. Ще покажем обаче, че

$$\text{dist}(s, t) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(x, y)$$

тоест,

$$\text{dist}(s, t) \geq \frac{1}{2} \text{diam}(G)$$

Ако покажем това, то ние сме решили задачата: пускането на алгоритъма на Дийкстра от произволен връх, последвано от намиране на максимално отдалечен връх, е желаният апроксимиращ алгоритъм. Той работи във време $O(m \lg n) + O(n) = O(m \lg n)$, което със сигурност е $O\left(m(\lg n)^5\right)$.

От обобщеното неравенство на триъгълника имаме

$$\text{dist}(x, s) + \text{dist}(s, y) \geq \text{dist}(x, y) \;\leftrightarrow\; \text{dist}(x, s) + \text{dist}(s, y) \geq \text{diam}(G)$$

Тъй като G е неориентиран, $\forall u, v \in V(G) : \text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u)$, така че в сила е

$$\text{dist}(s, x) + \text{dist}(s, y) \geq \text{diam}(G)$$

Но $\operatorname{dist}(s, x) \leq \operatorname{dist}(s, t)$ и $\operatorname{dist}(s, y) \leq \operatorname{dist}(s, t)$, тъй като по конструкция t е максимално отдалечен от s връх. Тогава

$$\operatorname{dist}(s,t) + \operatorname{dist}(s,t) \geq \operatorname{diam}(G)$$

тоест

$$\operatorname{dist}(s,t) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(G)$$

Задача 2. Дадено е множество от $n \geq 2$ човека. Всеки от тези хора е или измамник, или почтен. Нашата задача е да разберем кой какъв е. Имаме право (само) да вземаме двойки хора и да питаме всеки от тях какъв е другият. Тези хора се познават взаимно и всеки от тях знае всеки друг какъв е. Проблемът е в това, че измамниците може да лъжат. Те не лъжат винаги, но **може** да лъжат. Почтените винаги казват истината. Ето четирите възможни резултата от задаване на въпроса "Какъв е другият?" на двама души А и Б, за които не знаем кой какъв е, и какъв извод можем да направим във всеки от тях:

Какво казва А	Какво казва Б	Какъв извод правим
Б е почтен	А е почтен	Или и двамата са почтени, или и двамата са измамници
Б е почтен	А е измамник	Поне единият от А и Б е измамник
Б е измамник	А е почтен	Поне единият от А и Б е измамник
Б е измамник	А е измамник	Поне единият от А и Б е измамник

Всяко такова задаване на въпроси на двама души наричаме *тест*.

5 т. Обяснете защо е достатъчно да идентифицираме само един почтен човек, за да решим задачата.

45 т. Сега допуснете, че повече от половината от хората са почтени. Обяснете как може да сведете задачата за n човека до задача за m човека, където $m \leq \frac{n}{2}$, разбивайки множеството от n човека на двойки и тествайки всяка двойка. За удобство може да допуснете, че n е четно и m също е четно.
Упътване 1: Какво ще стане, ако всяка двойка, в отговорите на която има поне едно "измамник", бъде премахната в смисъл, че забравяме за тези хора и повече не ги разглеждаме?
Упътване 2: Ако са останали само двойки, чиито отговори са от вида "Другият е почтен" и освен това знаете, че повече от половината от тези двойки се състоят от двама почтени хора, как може да получите по-малко множество от хора, за които е вярно, че повече от половината са почтени? Както вече бе казано в условието, имате право да допуснете, че мощността на по-малкото множество също е четна, и че това е в сила при всяко намаляване на множеството, при което $m > 1$.

30 т. Покажете, че можем да разберем кой какъв е с $\Theta(n)$ теста.

Решение: Ако със сигурност знаем за някой човек X, че е почтен, можем да го тестваме с всеки друг човек Y. Y е такъв, какъвто X ни каже.

Ако n е четно, можем да групираме хората по двойки и да ги тестваме. Работим при допускането, че повече от половината са почтени. Нека почтените са с h повече от измамниците, за някое цяло положително h.

Нкеа има точно k двойки, за някое $k \geq 0$, $k < \frac{n}{2}$, в чиито отговори има поне едно "измамник". Според таблицата, ако в отговорите на двойката има поне едно "измамник" (което включва случая, в който и двата отговора са "измамник"), то е невъзможно и двамата от двойката да са почтени. Ерго, за k двойки е вярно, че единият или двамата са измамници. След елиминирането на произволна такава двойка остава вярно, че почтените са поне с h повече от измамниците. Тривиално е да се докаже по индукция по k—броят на въпросните двойки—че след елиминирането на всички тях, почтените са поне с h повече от измамниците. И така, можем да сведем примера на задачата с n човека до пример с $n-2k$ човека, в който за всяка двойка е вярно, че или и двамата са почтени, или и двамата са измамници (първият ред на таблицата), като обаче почтените са поне с h повече.

Тогава в този редуциран пример двойките от двама почтени са повече от двойките от двама измамници. Елиминираме произволно по един човек от всяка двойка и получаваме множество от $\frac{1}{2}(n-2k) = \frac{n}{2} - k$ човека, като измежду тях почтените са повече от половината. Ако това число е четно (което означава, че е по-голямо от 1, понеже едно не е четно), можем да процедираме по абсолютно същия начин, намалявайки множеството отново поне наполовина, като пак почтените са повече. И така натататък, докато не идентифицираме един почтен човек.

Предложеното решение има линейна сложност, понеже множествата намаляват поне наполовина. В най-лошия случай, те намаляват точно наполовина (няма двойки, в които поне един отговор е "измамник"), но е известно, че

$$\Theta(n) + \Theta(n/2) + \Theta(n/4) + \cdots = \Theta(n)$$

тъй като

$$n + n/2 + n/4 + \cdots < 2n$$

И двете суми имат краен брой суманди, въпреки "$\cdots$" в края, защото сумандите са цели числа. В условието е казано, че имаме право да допускаме, че при всяка дихотомия без последната, резултатното множество има четна мощност.

75 т. **Задача.** За всеки числен масив $A[1, \ldots, 2n + 1]$ с два по два различни елементи казваме, че A е *гърчав*, ако

$$A[1] < A[2] > A[3] < A[4] > A[5] < \cdots < A[2n] > A[2n + 1] \tag{1}$$

Предложете алгоритъм със сложност по време $\Theta(n)$, чийто вход е произволен масив $A[1, \ldots, 2n + 1]$ и който реализира таката пермутация на елементите на A, че резултатът е гърчав.

Достатъчно е да опишете алгоритъма на български едик, ясно и недвусмислено – не се иска псевдокод. Дайте кратка аргументация за коректност и съвсем кратък анализ на сложността по време. Помнете, че имате право да ползвате наготово алгоритми и техните обосновки от лекции.

Решение: В линейно време идентифицираме медианата—как става това е учено на лекции—и я слагаме на първа позиция. После на четните позиции слагаме елементите, по-големи от нея, в произволен ред, а на нечетните от трета нататък слагаме по-малките от нея, пак в произволен ред. Това също става в линейно време.

Може да си позволим да създадем нов масив B с $2n + 1$ позиции и да "пресипваме" от A в B, тъй като нямаме ограничение по памет. Очевидно така създаденият масив е гърчав и е създаден в линейно време.