А Л Г О Р И Т М И   В Ъ Р Х У   Г Р А Ф И

ПРИМЕРНО КОНТРОЛНО № 3 ПО “ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ” — ЗА СТУДЕНТИТЕ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, 2. ПОТОК, СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2019 / 2020 УЧЕБНА ГОДИНА

Моделирайте входните данни чрез граф. Уточнете вида му — ориентиран, неориентиран; тегловен, нетегловен. Обяснете какво представляват върховете и ребрата на графа, а също и посоките и теглата на ребрата (ако има посоки и тегла). Формулирайте това, което се търси, в термините на теорията на графите и изберете подходящ алгоритъм от изучените на лекции. Ако алгоритъмът обхожда графа в ширина или в дълбочина, уточнете вида на обхождането. Всички алгоритми и алгоритмични схеми да бъдат назовани с българските си наименования.

Задача 1. Процесите в химически завод трябва да бъдат много внимателно синхронизирани. Често продуктът на една химична реакция е годен за употреба само за много кратко време. Изискванията към една съвкупност от реакции изглеждат така:

“Реакцията X трябва да завърши най-късно три минути след реакцията Y.” $(x \leq y+3)$

“Реакцията Y трябва да завърши най-късно две минути преди реакцията Z.” $(y \leq z-2)$

И така нататък. (С малки латински букви са означени времената на завършване.)

Ако изискванията станат твърде много, е възможно да влязат в противоречие. Тогава тяхното осъществяване е невъзможно.

Предложете алгоритъм с полиномиална времева сложност, който проверява дали дадена съвкупност от изисквания е противоречива. **(4 точки)**

Задача 2. Нека A е крайно множество с n елемента. Нека $f : A \rightarrow A$, $g : A \rightarrow A$ и $h : A \rightarrow A$ са три функции, определени над множеството A, всяка от които се изчислява за време $\Theta(1)$ при всяка стойност на аргумента.

а) Искаме да проверим дали е вярно твърдението: За всеки два елемента $a \in A$ и $b \in A$ (не непременно различни) съществува композиция k на функциите f, g и h, такава че $k(a) = b$. Всяка от функциите f, g и h може да участва нула, един, два или повече пъти.

Предложете алгоритъм, който за време $\Theta(n)$ проверява изказаното твърдение. Входът на алгоритъма се състои от множеството $A[1...n]$ и трите функции f, g и h. Изходът е логическа стойност — истина или лъжа. Обърнете внимание, че a и b не са част от входа, нито част от изхода. Те са свързани променливи (пред тях има квантор за всеобщност), така че истинността на изказаното твърдение зависи само от A, f, g и h. **(4 точки)**

б) Разглеждаме следната задача: Дадени са A, f, g, h и два елемента $a \in A$ и $b \in A$. Търсим композиция k, съставена от възможно най-малко извиквания на функциите f, g и h, такава че $k(a) = b$.

Предложете алгоритъм, който за време $\Theta(n)$ намира композицията k. **(4 точки)**

в) Докажете, че времевата сложност на предложените алгоритми е $\Theta(n)$. **(4 точки)**

Задача 3. Постройте граф с 4 върха и посочете един от тях така, че дървото на най-късите пътища от посочения връх да е различно от минималното покриващо дърво. Графът трябва да бъде свързан, а теглата на ребрата — положителни и две по две различни. **(4 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Входните данни се представят чрез ориентиран граф. Върховете съответстват на химичните реакции, а ребрата — на изискванията за синхрон: всяко изискване $x \leq y + a$ поражда ребро с тегло a от върха X към върха Y. Теглото a е произволно реално число.

Път $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z$ поражда система от неравенства: $x \leq y + a$ и $y \leq z + b$. От тях следва, че $x \leq z + (a + b)$, т.е. теглата се събират като дължини. Същото важи за три и повече ребра.

Изискванията са противоречиви точно когато от тях следва неравенство от вида $x < x$, т.е. $x \leq x + a$ за някакво $a < 0$. Такъв извод съответства на ***цикъл с отрицателна дължина.*** Не е казано от кой връх трябва да бъде достижим въпросният цикъл, затова използваме ***алгоритъма на Флойд—Уоршал.*** Той има полиномиална времева сложност.

Задача 2. Построяваме ориентиран граф с n върха — елементите на даденото множество A. За всяко $a \in A$ изчисляваме $b = f(a)$, $c = g(a)$, $d = h(a)$, прекарваме три ребра от върха a към върховете b, c и d и на всяко ребро слагаме отметка чрез коя функция е получено — съответно f, g и h. Може да се получи мултиграф, тоест да има по няколко ребра между някои двойки върхове. Това не е пречка за следващите разсъждения.

а) Твърдението, подлежащо на проверка, означава, че графът е силно свързан, тоест има една ***компонента на силна свързаност.*** Това се проверява с ***обхождане в дълбочина.***

б) Композицията k съответства на ***най-къс път*** от върха a до върха b. Дължината на път тук мерим с броя на неговите ребра, затова използваме ***търсене в ширина.***

в) Времевата сложност на предложените алгоритми е линейна: $\Theta(n + m)$, където n и m са съответно броят на върховете и броят на ребрата на графа. От построението на графа е ясно, че от всеки връх излизат точно три ребра, тоест $m = 3n$. Ето защо $n + m = 4n = \Theta(n)$, тоест времевата сложност на предложените алгоритми е $\Theta(n)$.

Задача 3. Разглеждаме следния граф:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "100"] \arrow[d, dash, "102"'] & b \arrow[d, dash, "5"] \\ c \arrow[r, dash, "6"'] & d \end{tikzcd}$$

Дървото на най-късите пътища от върха a изглежда така:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "100"] \arrow[d, dash, "102"'] & b \arrow[d, dash, "5"] \\ c & d \end{tikzcd}$$

Минималното покриващо дърво на графа:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "100"] & b \arrow[d, dash, "5"] \\ c \arrow[r, dash, "6"'] & d \end{tikzcd}$$