Д И Н А М И Ч Н О   П Р О Г Р А М И Р А Н Е
ПРИМЕРНО КОНТРОЛНО № 4 ПО “ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ” — ЗА СТУДЕНТИТЕ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, 1. ПОТОК, СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2019 / 2020 УЧЕБНА ГОДИНА

Задача 1. Всяка пермутация без повторение представлява композиция от независими цикли. Например пермутацията 5, 6, 3, 1, 4, 2 се състои от три цикъла: (5, 4, 1), (6, 2) и (3). Всяка неподвижна точка (да кажем, числото 3 от дадения пример) сама по себе си е цикъл. Нека $c(n; k)$ е броят на пермутациите без повторение на числата $1, 2, 3, \ldots, n$, които съдържат точно k цикъла. Числата n и k са цели неотрицателни и $k \leq n$.

а) Опишете на псевдокод итеративен алгоритъм за пресмятането на функцията $c(n; k)$ със сложност по време и памет $\mathrm{O}(nk)$.

Упътване: Разгледайте две възможности за числото n: да бъде неподвижна точка или да участва в цикъл с дължина поне 2. Във втория случай помислете колко възможности има за числото, след което се вмъква n в съответния цикъл.

б) Попълнете таблица със стойностите на $c(n; k)$ за всички n и k, ненадхвърлящи 5.

в) Оптимизирайте алгоритъма така, че сложността по памет да стане $\mathrm{O}(k)$. Опишете оптимизацията на псевдокод. (Ако това е направено в точка “а”, само се позовете на нея.)

Задача 2. Съставете алгоритъм с времева сложност $\mathrm{O}(n^2)$, който по дадена редица $A[1 \ldots n]$ от цели положителни числа търси най-дълга подредица, всеки член на която без последния дели следващия член на подредицата.

Задачата може да се реши поне по два начина: чрез ориентиран ацикличен граф или направо (тоест без построяване на граф). Ако решавате задачата по първия начин, опишете алгоритъма словесно: как се построява графът, какво представляват върховете и ребрата му, как се определя посоката на всяко ребро, защо графът е ацикличен, до коя известна задача за динамично програмиране при ориентирани ациклични графи се свежда задача 2.

Ако решавате задачата без граф, опишете алгоритъма на псевдокод. В този случай е достатъчно да намерите само дължината на най-дълга подредица без самата подредица. Получавате допълнителни точки, ако допишете псевдокода така, че да отпечатва и самата най-дълга подредица.

Както и да решавате задачата, демонстрирайте работата на алгоритъма върху следните входни данни: $A = (7;\ 5;\ 6;\ 30;\ 14;\ 210;\ 150;\ 250)$.

СХЕМА НА ТОЧКУВАНЕ

Цялото контролно носи максимум 20 точки, разпределени по задачи, както следва.

Задача 1 съдържа 12 точки — по 4 точки за всяко подусловие.

Задача 2 съдържа 8 точки — по 4 точки за всяка стъпка:
— описание на алгоритъма;
— демонстрация на алгоритъма.
Допълнителни 4 точки (извън предвидения максимум от 20 т.) носи алгоритъм на псевдокод (неизползващ графи), който в задача 2 намира самата подредица (а не само дължината ѝ).

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Пермутациите без повторение на числата 1, 2, . . . , n, съдържащи точно k цикъла, са два вида. В първия вид числото n е неподвижна точка, тоест само̀ образува цикъл. Затова след премахването му остава пермутация без повторение на числата 1, 2, . . . , $n-1$, съдържаща точно $k-1$ цикъла. Броят на тези пермутации е $c(n-1;\ k-1)$.

Пермутациите от другия вид съдържат числото n в цикъл с дължина поне 2. След изтриването на n остава пермутация без повторение на числата 1, 2, . . . , $n-1$, съдържаща точно k цикъла. Тези пермутации са $c(n-1;\ k)$ на брой, а числото n може да се вмъкне в коя да е от тях, общо на $n-1$ места — зад което и да е от числата 1, 2, . . . , $n-1$.

Ето защо функцията $c(n, k)$ удовлетворява рекурентното уравнение

$$c(n;k) = c(n-1;\ k-1) + (n-1)\,.\,c(n-1;k) \text{ при } n > k > 0,$$

както и следните начални условия:

$c(n;0) = 0$ за всяко цяло $n \ge 1$ (всяка непразна пермутация съдържа цикъл);
$c(n;n) = 1$ за всяко цяло $n \ge 0$ (идентитетът съдържа най-много цикли).

Таблицата по-долу съдържа първите няколко стойности на функцията $c(n;k)$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

В комбинаториката тези числа са известни като ***числа на Стирлинг от първи род.***

Псевдокод на алгоритъма:

```
c(n,k) // 0 ≤ k ≤ n
dyn[0...n][0...k]: array of integers
for m ← 1 to n do
   dyn[m][0] ← 0
for j ← 0 to k do
   dyn[j][j] ← 1
for m ← 1 to n do
   for j ← 1 to min(m-1,k) do
      dyn[m][j] ← dyn[m-1][j-1] + (m-1) × dyn[m-1][j]
return dyn[n][k]
```

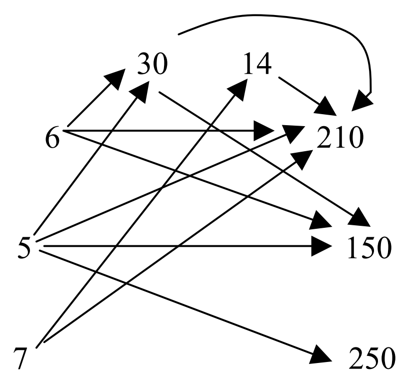
Изложеното решение има сложност $\Theta(nk)$ — колкото е размерът на динамичната таблица. Може да се постигне сложност по памет $\Theta(k)$ с помощта на следното наблюдение: числата във всеки ред от таблицата зависят само от числата в предходния ред. Затова е достатъчно да пазим само един ред от таблицата (и да го пресмятаме отдясно наляво).

Псевдокод на оптимизирания алгоритъм:

```
c(n,k) // 0 ≤ k ≤ n
if n = k
   return 1
if k = 0
   return 0
dyn[0...k]: array of integers
dyn[0] ← 0
for m ← 1 to n do
   if m ≤ k
      dyn[m] ← 1
   for j ← min(m-1,k) downto 1 do
      dyn[j] ← dyn[j-1] + (m-1) × dyn[j]
return dyn[k]
```

Задача 2. По дадения масив $A[1...n]$ построяваме ориентиран граф с върхове 1, 2, . . . , n (индексите на елементите на масива). От върха i към върха j има ребро тогава и само тогава, когато $i < j$ и $A[i]$ дели $A[j]$. Така построеният ориентиран граф е ацикличен, защото ребрата сочат само от връх с по-малък към връх с по-голям номер. Търсената най-дълга подредица съответства на най-дълъг път в графа; за тази задача разполагаме с готов алгоритъм, изучен на лекции — динамично програмиране при ориентирани ациклични графи. Можем да си спестим топологичното сортиране на графа: върховете са сортирани поначало, защото ребрата сочат от връх с по-малък към връх с по-голям номер.

При $A = (7;\ 5;\ 6;\ 30;\ 14;\ 210;\ 150;\ 250)$ графът изглежда така:



Най-дългите пътища в графа имат дължина 2 (тоест състоят се от две ребра и три върха). Има няколко такива пътя и всеки от тях съответства на най-дълга подредица от (три) числа, всяко от които е делител на следващото. Една такава подредица е (7; 14; 210). Има и други, например (5; 30; 150) и (6; 30; 150).

Разновидност на горното решение е да добавим два фиктивни върха s и t: от s излизат ребра към всички други върхове (вкл. t), а в t влизат ребра от всички други върхове (вкл. s). Сега търсим най-дълъг път от s до t вместо най-дълъг път между всеки два върха.

Построяването на графа изисква време $\Theta(n^2)$: трябва да проверим за всяка двойка числа дали има ребро между тях. Търсенето на най-дълъг път в получения граф изразходва време, линейно спрямо размера на графа, което пак е $\Theta(n^2)$: толкова са ребрата в най-лошия случай (когато всяко число дели всички следващи числа). Времето на целия алгоритъм е сборът от тези две времена, тоест $\Theta(n^2)$.

Можем да използваме същата идея, без да строим явен граф. Псевдокод:

```
LongestDivSubsequence(A[1...n]: array of positive integers)
dyn[1...n]: array of positive integers
prev[1...n]: array of non-negative integers
// dyn[k] = дължината на най-дългата подредица на A[1...k],
// завършваща с A[k], всеки член на която дели следващия;
// prev[k] = индекса от A на нейния предпоследен член.
dyn[1] ← 1
prev[1] ← 0 // Елементът A[1] няма предходен.
for j ← 2 to n do
   dyn[j] ← 0
   prev[j] ← 0 // Елементът A[j] е начало на подредица.
   for i ← 1 to j - 1 do
      if A[j] mod A[i] = 0 // ако A[i] дели A[j]
         if dyn[i] > dyn[j]
            dyn[j] ← dyn[i]
            prev[j] ← i // A[j] продължава някоя подредица.
            // Понеже i < j, то prev[j] < j.
   dyn[j] ← dyn[j] + 1
bestEnd ← 1
for j ← 2 to n do
   if dyn[j] > dyn[bestEnd]
      bestEnd ← j

// Възстановяване на решението:
// индексите на най-дългата подредица се отпечатват
// в обратен ред (от най-големия към най-малкия).
j ← bestEnd
while j > 0 do
   print j
   j ← prev[j] // Понеже prev[j] < j, то j намалява строго.

// Алгоритъмът връща дължината на най-дълга подредица,
// всеки член на която (без последния) дели следващия.
return dyn[bestEnd]
```

Анализ на времевата сложност: Двата вложени цикъла, попълващи динамичната таблица, изразходват време $\Theta(n^2)$. Цикълът след тях, който обхожда попълнената таблица и търси най-голяма дължина, изисква време $\Theta(n)$. Възстановяването изисква време $O(n)$, тъй като индексът `j` намалява с поне една единица на всяка стъпка. Окончателно, времето за работа на целия алгоритъм е $\Theta(n^2)$.

Демонстрация на алгоритъма при $A =$ (7; 5; 6; 30; 14; 210; 150; 250):

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$A[k]$	7	5	6	30	14	210	150	250
dyn[k]	1	1	1	2	2	3	3	2
prev[k]	0	0	0	2	1	4	4	2

Най-голямото число в реда dyn е числото 3. В случая има няколко такива числа. По принцип няма значение кое от тях ще използваме. Алгоритъмът запомня индекса на първото от тях. Първата тройка има индекс $k = 6$, затова алгоритъмът започва възстановяването от шестия елемент на масива A:

prev[6] = 4; prev[4] = 2; prev[2] = 0 (няма повече членове).

Намерената най-дълга подредица се състои от втория, четвъртия и шестия член на масива A, тоест това е редицата (5; 30; 210).