1997 година ФМИ - вътрешен кръг

Задача 1. Нека $S(n,k)$ е сумата на всички общи (различни) делители на естествените числа n и k . Да се пресметне детерминантата:

$$\begin{vmatrix} S(1,1) & S(1,2) & \dots & S(1,n) \\ S(2,1) & S(2,2) & \dots & S(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(n,1) & S(n,2) & \dots & S(n,n) \end{vmatrix}$$

Задача 2. Нека за редицата a_n , $n = 1,2\dots$ е изпълнено $a_n \geq 0$, $n = 1,2\dots$. Дефинираме $b_n = \sqrt{b_{n-1} + a_n}$, $n = 1,2\dots$, където $b_0 > 0$.

а) Да се докаже, че редицата $\{b_n\}_0^\infty$ е сходяща тогава и само тогава, когато редицата $\{a_n\}_1^\infty$ е сходяща.

б) Вярно ли е, че $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$?

Задача 3. За елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} \leq 1$, $a > b > 0$ да се намери най-голямото лице на вписан и най-малкото на описан триъгълник. За кои триъгълници се достигат екстремалните стойности ? Има ли равностранни триъгълници с това свойство ?

Задача 4.

а) За $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k}$ да се да се покаже, че функцията $S_{n+1}(x) + S_n(x)$ е монотонна в интервала $[0,\pi]$.

б) Да се докаже, че $S_n(x) \geq -1$ за всяко $x \in [0,\pi]$ и всяко $n \in \mathbb{N}$.

в) Да се намери

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{ \min_{x\in[0,\pi]} S_n(x) \right\} \quad .$$

Задача 5. За $a > 0$ и b , $|b| \leq a$ дефинираме

$$F(a,b) = \left\{ f \in C^1[0,1] \ , f(0) = 0 \ , f(1) = b \ , \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = a \right\} \quad .$$

Да се намерят

$$\sup_{f\in F(a,b)} \int_0^1 f(x)\,dx \qquad , \qquad \inf_{f\in F(a,b)} \int_0^1 f(x)\,dx \quad .$$

Задача 6. а) Да се докаже, че

$$1+\frac{u}{n}-\frac{(n-1)u^2}{2n^2}\leq\sqrt[n]{1+u}\leq 1+\frac{u}{n}$$

за $u\in[0,1]$ и $n\in\mathbb{N}$.

б) Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,e^n\int_0^1|x\ln x|^n\,dx\quad.$$

в) Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3}\,e^n\left(\int_0^1\sqrt[n]{1+|x\ln x|^n}\,dx-1\right)\quad.$$

1998 година ФМИ - вътрешен кръг

Задачи по анализ

Задача 1. Нека $S(k)$ е сумата на цифрите на естественото число k в десетична бройна система. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} S(1998^n) = +\infty \ .$$

Задача 2. Нека f има непрекъсната втора производна в $[0,2]$ и $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува $c_n \in (0,2)$ такова, че

$$n^2\, f(c_n) + f''(c_n) = 2n\, f'(c_n) \ .$$

Има ли функция с горните свойства, за която за всяко естествено число n числото c_n е единствено?

Задача 3. За $0 \le x < 1$ полагаме

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^{[2^n x]}}{n!} \ ,$$

където $[y]$ е цялата част на числото y. Да се пресметне:

а)

$$g(1) = \lim_{x\to 1} g(x)$$

б)

$$\int\limits_0^1 g(x)\, dx$$

Задача 4. Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$$

е сходящ.

1999 година ФМИ - вътрешен кръг

Задача 1. За квадратните матрици A и B от ред 1999 е известно, че $AB = 0$. Да се докаже, че $det[(A + A^t)(B + B^t)] = 0$, където с A^t и B^t са означени транспонираните на A и B матрици.

Задача 2. Нека нулите $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ на полинома $P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, $a_0 \neq 0$ са различни. Да се пресметнат сумите :

$$S_k = \sum_{p=1}^{n} \frac{b_p^k}{P'(b_p)}\,, \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1\,.$$

Задача 3. За пермутация π на числата $\{\,1,\, 2,\, \ldots,\, n-1,\, n\,\}$ полагаме $\pi(n+1) = \pi(1)$ и

$$R(\pi) = \sum_{p=1}^{n} |\,\pi(p) - \pi(p+1)\,|\,.$$

Да се намерят най-малката и най-голямата възможна стойност на $R(\pi)$.

Задача 4. Да се пресметне :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{6n+5}\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{6n+1}\right)} \qquad .$$

Задача 5. Нека $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$.Да се пресметне сумата:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} \qquad .$$

Задача 6. Да се пресметне :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}\, t\right)^x dt \qquad .$$

Задача 7. Нека $Q(t)$ е полином, който не е тъждествено равен на константа. Да се докаже, че системата :

$$\int_0^x Q(t) \sin t\, dt = 0 \qquad , \qquad \int_0^x Q(t) \cos t\, dt = 0$$

има най-много краен брой решения относно x.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 23 април 2000 година

Задача 1. Нека $\mathcal{M}$ е множество от $2n-1$ различни ирационални числа. Да се докаже, че съществуват n (различни) елемента $x_1, x_2, \ldots x_n$ на $\mathcal{M}$ такива, че за всеки набор $a_1, a_2, \ldots a_n$ от неотрицателни рационални числа, не всички равни на 0, числото $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ е ирационално.

Задача 2. За (реалното) число $\alpha \neq 0$ и линейните оператори F и G от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ е дадено, че $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.

а) Да се докаже, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F$.

б) Да се докаже, че съществува $k \in \mathbb{N}$, за което $F^k = 0$.

Задача 3. Нека A е реална, обратима, симетрична $n \times n$ $(n \geq 2)$ матрица със строго положителни елементи. Какъв е максималният брой на нулевите елементи на обратната матрица A^{-1} ?

Задача 4. Нека $f : [0,1] \to [0,1]$ е непрекъсната функция. Да се докаже, че редицата $x_0 \in [0,1]$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ е сходяща тогава и само тогава, когато

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0 .$$

Задача 5. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има $(n+1)$-ва производна във всяка точка. Да се докаже, че за всяка двойка реални числа a, b, $a < b$ такива, че

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \cdots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \cdots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$$

съществува $c \in (a,b)$ за което

$$f^{(n+1)}(c) = f(c) .$$

Задача 6. Нека $f : [0, 2\pi] \to [0,1]$ е непрекъсната функция и

$$a = \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx , \quad b = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx .$$

Да се докаже, че $a^2 + b^2 \leq 4$.

Задача 7. Да се докаже, че съществува положителна константа c такава, че

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{c}{x}$$

за всяко $x \in [1, +\infty)$.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 22 април 2001 година

Задача 1. Нека за редицата a_n , $n = 1, 2, \ldots$ е изпълнено $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Дефинираме $b_n = \sqrt{b_{n-1} + a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, където $b_0 > 0$.

а) Да се докаже, че редицата $\{b_n\}_0^\infty$ е сходяща тогава и само тогава, когато редицата $\{a_n\}_1^\infty$ е сходяща.

б) Вярно ли е, че $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$?

Задача 2. Нека $\mathcal{V}_n$ е реално n-мерно векторно пространство със скаларно произведение $\langle .\, , .\rangle \ : \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ и $M \subset \mathcal{V}_n$ е множество от $2n+1$ различни ненулеви вектора. Да се докаже, че съществуват два различни елемента x и y от M такива, че $\langle x, y\rangle > 0$.

Задача 3. Нека $P(x)$ е полином с реални коефициенти, за който $0 \leq P(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че съществуват полиноми $Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots, Q_n(x)$ с реални коефициенти такива, че

$$P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x) + \cdots + Q_n^2(x) \, .$$

Задача 4. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати върху цялата реална права, като $f(g(x)) = g(f(x))$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и $f(f(0)) = g(g(0))$. Докажете, че съществува $x_0 \in \mathbb{R}$, за което $f(x_0) = g(x_0)$.

Задача 5. За $a > 0$ и b , за които $|\,b| \leq a$, дефинираме

$$F(a,b) = \left\{ f \in C^1[\,0,1\,] \ : \ f(0) = 0\, ,\ f(1) = b\, ,\ \max_{x\in[\,0,1\,]} |\, f'(x)| \leq a \right\} \quad .$$

Да се намерят

$$\sup_{f\in F(a,b)} \int_0^1 f(x)\,dx \quad , \quad \inf_{f\in F(a,b)} \int_0^1 f(x)\,dx \quad .$$

Задача 6. За $0 < q < 1$ пресметнете границата

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=0}^{2n-1} q^{k-1} \sin\frac{k\pi}{n} \, .$$

Задача 7. Нека X е обратима матрица с вектор-стълбове $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а Y е матрицата с вектор-стълбове $X_2, X_3, \ldots, X_n, 0$. Намерете ранга и собствените стойности на матриците $A = YX^{-1}$ и $B = X^{-1}Y$.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 27 февруари 2002 година, 1-2 курс

Задача 1. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е определена чрез

$$f(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

където $\tau(n)$ е броят на делителите (различни) на n. Покажете, че f е инекция в $\mathbb{N}$.

Задача 2. n от върховете на правилен $2n$-ъгълник са оцветени в червено, а останалите – в синьо. Пренареждаме редицата от всички разстояния между два червени върха в ненамаляваща. Същото извършваме и с редицата от всички разстояния между два сини върха. Докажете, че получените редици са идентични.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена редица от реални числа. Вярно ли е, че от

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = b \quad \text{и} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = c$$

следва $b = c$?

Задача 4. Нека A е множество от естествени числа, за което

$$\text{от } x, y \in A \text{ и } x > y \quad \text{следва} \quad x - y \geq \frac{xy}{25} \quad .$$

Намерете максималния възможен брой на елементите на A.

Задача 5. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Докажете неравенствата

$$\frac{n\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{8n}} \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \leq \frac{n\pi}{4} \quad .$$

Задача 6. Нека A, B, C са непразни подмножества на $\mathbb{R}^n$. A е ограничено, C е затворено и изпъкнало, и $A + B \subseteq A + C$. Докажете, че $B \subseteq C$.

По дефиниция $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$ и $D \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало, ако

$$\forall\, x, y \in D \;\forall\, t \in [0, 1] \implies tx + (1 - t)y \in D \quad .$$

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 27 февруари 2002 година, 3-4 курс

Задача 1. Нека $\mathbb{H}$ е комплексно Хилбертово пространство и $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ е ограничен линеен оператор, за който $|\langle Tx, x\rangle| \le \|x\|^2$ за всяко $x \in \mathbb{H}$. Нека още $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$, е собствена стойност със собствено подпространство $E = \{\phi : T\phi = \mu\phi\}$. Докажете, че ортогоналното допълнение $E^\perp = \{x \in H : \forall\phi \in E \ \langle x, \phi\rangle = 0\}$ на E е инвариантно относно T, т.е. $T(E^\perp) \subset E^\perp$.

Задача 2. Ако напишем $AAABABBB$ по окръжност, то всяка дума с дължина 3, съдържаща буквите A and B (т.е. AAA, AAB, ABA, BAB, ABB, BBB, BBA, BAA) се среща точно един път (при четене по посока на написването). За кои естествени числа k и l е възможно написването на дума, състояща се от буквите на азбука с k елемента, по окръжност такава, че всяка дума с дължина l, съдържаща буквите от азбуката, се среща точно веднъж.

Задача 3. Нека m, n са естествени числа и $x \in [0,1]$. Докажете, че

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \ge 1 .$$

Задача 4. Покажете, че корените (комплексни) на полинома

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n ,$$

където $0 < a_0 < ... < a_n$, удовлетворяват $|z| > 1$.

Задача 5. Нека $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Дефинираме редица от функции $\{f_n\}$, $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ като полагаме:

$$f_0(x) = f(x),\ f_{n+1}(x) = \int\limits_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Докажете, че ако $f_n(1) = 0$ за всяко n, то $f(x) \equiv 0$.

Задача 6. $\mathcal{R}$ е асоциативен, некомутативен пръстен, а $n > 2$ е фиксирано естествено число. Ако $x^n = x$ за всяко $x \in \mathcal{R}$, докажете, че $xy^{n-1} = y^{n-1}x$ за всички $x, y \in \mathcal{R}$.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 17 януари 2003 година, 1-2 курс

Задача 1. Да се пресметне:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(k+1)} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^k\right]$$

където с $[x]$ е означена цялата част на числото x, т.е. $[x] \in \mathbb{Z}$ и $[x] \le x < [x]+1$.

Задача 2. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(k - \left[\sqrt{k}\right]^2\right)^2 ,$$

където с $[x]$ е означена цялата част на числото x, т.е. $[x] \in \mathbb{Z}$ и $[x] \le x < [x]+1$.

Задача 3. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които $6f(f(x)) = f(x) + 2x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Дадено е, че $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{e^{x_n} - 1}$ за $n \in \mathbb{N}$. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n} .$$

Задача 5. За всяка елипса и точка върху нея да се докаже, че съществува полуправилен шестоъгълник, вписан в елипсата и с връх дадената точка.

Шестоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ наричаме полуправилен, ако
$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1$ и $A_1A_2 \parallel A_4A_5,\ A_2A_3 \parallel A_5A_6,\ A_3A_4 \parallel A_6A_1$.

Задача 6. Нека G е крайно множество от $n \times n$ матрици, което е група относно обичайното умножение на матрици (т.е. *1)* от $A \in G,\ B \in G$ следва $AB \in G$; *2)* G съдържа единичната матрица; *3)* всеки елемент на G е обратима матрица и от $A \in G$ следва $A^{-1} \in G$). Да се докаже, че ако $\sum\limits_{M \in G} tr(M) = 0$, то $\sum\limits_{M \in G} M = 0$, където $tr(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$ е следата на матрицата A.

Задача 7. Нека $\mathcal{U}$ е реално линейно пространство с $\dim \mathcal{U} = 2003$. Да се намери минималния брой подпространства $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \ldots,\ \mathcal{V}_N$ на $\mathcal{U}$ такива, че всеки линеен оператор $\mathcal{L} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, за който $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \ldots,\ \mathcal{V}_N$ са инвариантни (т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$), е пропорционален на идентитета (т.е. съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ с $\mathcal{L}(u) = \lambda u$ за всяко $u \in \mathcal{U}$).

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 17 януари 2003 година, 3-4 курс

Задача 1. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които $6\,f\,(f\,(x)) = f\,(x) + 2x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3}\, e^n \left(\int_0^1 \sqrt[n]{1 + |x \ln x|^n}\, dx - 1 \right) .$$

Задача 3. За всяка елипса и точка върху нея да се докаже, че съществува полуправилен шестоъгълник, вписан в елипсата и с връх дадената точка.

Шестоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ наричаме полуправилен, ако $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1$ и $A_1A_2 \parallel A_4A_5,\ A_2A_3 \parallel A_5A_6,\ A_3A_4 \parallel A_6A_1$.

Задача 4. Нека $\mathcal{A}$ е изброимо множество от кълба в $\mathbb{R}^3$. Да се докаже, че ако за всяко крайно подмножество $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ е възможно да разположим кълбата от $\mathcal{B}$ в куб с ръб 1, като никои две от тях нямат общи вътрешни точки, то всички кълба от $\mathcal{A}$ могат да бъдат разположени в същия куб, като никои две от тях нямат общи вътрешни точки.

Задача 5. Нека Φ е множеството от всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които $|\,f(x)| \leq 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Да се пресметне

$$\sup_{f \in \Phi} \left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t) \cos\left(t^3 + at^2 + bt + c\right) dt \right) ,$$

където $a,\ b,\ c$ са дадени реални числа.

Задача 6. Нека $\mathcal{P}$ е множеството от всички полиноми над полето на комплексните числа $\mathbb{C}$.

Да се пресметне

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \left(\sup_{|z| = 1} \left| P(z) - \frac{1}{z^{2003}} \right| \right) .$$

Задача 7. Да се докаже, че за всяка крайна група G следните твърдения са еквивалентни:

(а) уравнението $x^3ax^6ax^6ax^3a^2x^3ax^6ax^6ax^3 = b$ има решение за всеки $a,\, b \in G$

(б) уравнението $x^2a^2x^4a^2x^4a^2x^2ax^2a^2x^4a^2x^4a^2x^2 = b$ има решение за всеки $a,\, b \in G$

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 17 януари 2004 година, 1-2 курс

Задача 1. Нека Δ_{n+1} е детерминантата от ред $n+1$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix} .$$

Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{k+1}$.

Задача 2. За квадратните матрици A и B от ред 2003 е известно, че $AB = 0$. Да се докаже, че $det[(A + A^t)(B + B^t)] = 0$, където с A^t и B^t са означени транспонираните на A и B матрици.

Задача 3. Дадено е, че $x_1 > 1$ и $x_{n+1}x_n - 2\,x_n + 1 = 0$ за $n \in \mathbb{N}$. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^n$.

Задача 4. Нека $P(x,y)$ е полином на две променливи от степен не по-висока от 5, $M = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P(x,y) = 0 \Big\}$, а $E \subset \mathbb{R}^2$ е елипса. Да се докаже, че ако $M \cap E$ съдържа поне 11 различни точки, то $E \subset M$.

Задача 5. Да се докаже, че:
а) $\mathbb{R}^2$ **не може** да се представи като обединение на непресичащи се окръжности;
б) $\mathbb{R}^3$ **може** да се представи като обединение на непресичащи се окръжности.

Задача 6. Да се намери най-голямото число C , за което неравенството

$$C \operatorname{arctg} x + \arcsin x > (C+1)\, x$$

е изпълнено за всяко $x \in (0\,,\,1)$.

Задача 7. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема, като $f''(x) > \dfrac{1}{x^2+1}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че f няма асимптоти.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 17 януари 2004 година, 3-4 курс

Задача 1. Нека $P(x,y)$ е полином на две променливи от степен не по-висока от 5, $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P(x,y) = 0 \right\}$, а $E \subset \mathbb{R}^2$ е елипса. Да се докаже, че ако $M \cap E$ съдържа поне 11 различни точки, то $E \subset M$.

Задача 2. Да се докаже, че:
а) $\mathbb{R}^2$ **не може** да се представи като обединение на непресичащи се окръжности;
б) $\mathbb{R}^3$ **може** да се представи като обединение на непресичащи се окръжности.

Задача 3. Да се пресметне границата:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} t \right)^x dt \qquad .$$

Задача 4. Нека $(X \, , ||\,.\,||)$ е реално нормирано пространство, $K \subset X$ е компактно и изпъкнало множество и $f \, : \, K \to K$ е изображение, за което

$$|| f(x) - f(y) || \leq || x - y || \quad \text{за всеки} \quad x \in K \, , \; y \in K \, .$$

Да се докаже, че f има неподвижна точка (т.е. съществува $x_0 \in K$, за което $f(x_0) = x_0$).

Задача 5. Нека $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че
а) функцията $S_{n+1}(x) + S_n(x)$ е монотонна в интервала $[0, \pi]$;
б) $S_n(x) \geq -1$ за всяко $x \in [0, \pi]$ и всяко $n \in \mathbb{N}$.
в) Да се намери

$$\liminf_{n \to \infty} \left\{ \min_{x \in [0,\pi]} S_n(x) \right\} \qquad .$$

Задача 6. Нека $P(z)$ е полином n-та степен с комплексни коефициенти. Да се докаже, че ако всички корени на $P(z)$ са с модул 1, то всички корени на полинома $Q(z) = 2zP'(z) - nP(z)$ също са с модул 1.

Задача 7. За крайната група G съществува автоморфизъм φ от втори ред (т.е. $\varphi(\varphi(x)) = x$ за всяко $x \in G$), който има единствена неподвижна точка неутралния елемент e на G (т.е. от $\varphi(y) = y$ следва $y = e$). Да се докаже, че G е Абелева група от нечетен ред.

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 25 февруари 2005 година, 1-2 курс

Задача 1. Нека a, b, $c \in \mathbb{N}$ са такива, че $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \in \mathbb{N}$.
Да се докаже, че $abc = k^3$ за $k \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2007}} \det\left(A_n + E_n\right) ,$$

където

$$A_n = \begin{pmatrix} n^{2005} & n^{2005} & n^{2005} & \dots & n^{2005} \\ 2\,(n-1)^{2005} & 2\,(n-1)^{2005} & 2\,(n-1)^{2005} & \dots & 2\,(n-1)^{2005} \\ 3\,(n-2)^{2005} & 3\,(n-2)^{2005} & 3\,(n-2)^{2005} & \dots & 3\,(n-2)^{2005} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} ,$$

а E_n е единичната $n \times n$ матрица.

Задача 3. Нека A и B са $n \times n$ матрици, за които $A + B = E$ (E е единичната $n \times n$ матрица) и $rank\,(A) + rank\,(B) = n$. Да се докаже, че $A^2 = A$ и $B^2 = B$.

Задача 4. Нека редицата a_0, a_1, $\dots$, a_n удовлетворява условието $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)^2} = 0$. Да се докаже, че полиномът $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ притежава корен в интервала $(0\,,\,1)$.

Задача 5. Нека x, y, z са неотрицателни реални числа, за които $x + y + z + 4xyz = 2$. Да се докаже, че $xy + yz + zx \leq 1$.

Задача 6. Разглеждаме думите, породени от азбука с две букви $\{A,\, B\}$. Баланс на думата Str е $|S_A - S_B|$, където S_A и S_B са съответно броя на буквите A и B на Str (пример: балансът на $AAAABB$ е 2). Една дума наричаме балансирана, ако балансът на всяка нейна поддума (поддума е дума, която получаваме от изходната премахвайки няколко последователни букви от началото и/или края на думата; пример: AAA е поддума на $BAAABBA$, но не е поддума на $BBAABBA$) не надвишава 2 (пример: $AABBAA$ е балансирана, $AABAAB$ не е балансирана). Да се намери броят на балансираните думи с дължина $n \in \mathbb{N}$.

Задача 7. Функцията $f(x)$ е непрекъсната и изпъкнала в интервала $[\,a,\, b\,]$. Да се докаже неравенството:

$$2 \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+3b}{4}} f(x)\,dx \;\leq\; \int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad .$$

За кои функции имаме равенство?

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 25 февруари 2005 година, 3-4 курс

Задача 1. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $|f|$ е изпъкнала функция. Да се докаже, че функцията $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана с $F(x,y) = |f(x)| + |f(x) - y|$ е изпъкнала (т.е. $F(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \leq tF(x_1,y_1) + (1-t)F(x_2,y_2)$ за всеки $t \in [0,1]$, $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ и $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$).

Задача 2. а) Да се докаже, че рационалните числа в $(0\,,1)$ могат да бъдат номерирани така, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (r_n)^n$ да е сходящ.

б) Да се докаже, че рационалните числа в $(0\,,1)$ могат да бъдат номерирани така, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (r_n)^n$ да е разходящ.

Задача 3. Нека x, y, u, v са неотрицателни реални числа, за които

$$3\,(x+y+u+v) + 4\,(xyu + xyv + xuv + yuv) = 8\;.$$

Да се докаже, че $xy + yu + uv + vx + xu + yv < 2$.

Задача 4. Нека $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$ е редица, за която $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = c > 0$. Да се пресметне границата $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \;(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{c_n}}{2 - x^{c_n}}$.

Задача 5. Разглеждаме думите, породени от азбука с две букви $\{A,\, B\}$. Баланс на думата Str е $|S_A - S_B|$, където S_A и S_B са съответно броя на буквите A и B на Str (пример: балансът на $AAAABB$ е 2). Една дума наричаме балансирана, ако балансът на всяка нейна поддума (поддума е дума, която получаваме от изходната премахвайки няколко последователни букви от началото и/или края на думата; пример: AAA е поддума на $BAAABBA$, но не е поддума на $BBAABBA$) не надвишава 2 (пример: $AABBAA$ е балансирана, $AABAAB$ не е балансирана). Да се намери броят на балансираните думи с дължина $n \in \mathbb{N}$.

Задача 6. За даден полином $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ полагаме $S\,(Q) = b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 + b_n^2$. Да се докаже, че ако $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ е полином с реални коефициенти и всичките му корени (комплексни) са с отрицателна реална част, то

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{S\left(P^k\right)} \;= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n)^2\;.$$

Задача 7. Нека G е група с неутрален елемент e и $\varphi : G \to G$ е функция, за която $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) = \varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)$ за всеки две тройки елементи x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 на G, за които $x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3 = e$. Да се докаже, че съществува $a \in G$ така, че функцията $\Phi\,(x) = a\varphi\,(x)$ е автоморфизъм (т.е. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ за всеки x, $y \in G$).

Студентска Олимпиада по Математика
ФМИ - вътрешен кръг, 15 април 2006 година

Задача 1. Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, не по-голямо от x (примери: $[7] = 7$, $\left[\frac{22}{7}\right] = 3$, $\left[-\frac{7}{2}\right] = -4$). Да се реши уравнението $x\,[x\,[x\,[x]]] = 84$.

Задача 2. Да се намерят всички възможни стойности на ранга на $n \times n$ матрица, чиито елементи са цели числа, като диагоналните са четни, а останалите — нечетни числа.

Задача 3. Нека A и B са квадратни реални матрици, за които $A^{2006} = E$, $B^{2007} = E$ и $AB = BA$. Да се докаже, че матрицата $A+B+E$ е обратима (E е единичната матрица).

Задача 4. Редицата $\{a_n\}_0^\infty$ е дефинирана с равенствата $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + n$. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$.

Задача 5. Нека $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, за която $|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 1$ за всеки $x, y \in [0, +\infty)$. Да се докаже, съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Задача 6. Функцията $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ има втора непрекъсната производна. За $x \in (-1, 1)$ е определено числото $0 < \theta(x) < 1$, за което $f(x) = f(0) + xf'(x\theta(x))$ (теорема за крайните нараствания). Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$.

Задача 7. Нека $\mathcal{F}$ е множеството от непрекъснатите в $[0, 1]$ функции, за които $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Да се намери $f_0 \in \mathcal{F}$ такава, че $\int_0^1 (1+x^2) f_0(x)\,dx \le \int_0^1 (1+x^2) f(x)\,dx$ за всяка функция $f \in \mathcal{F}$.