1.6 Теорема за пълнота

В предния параграф видяхме, че всяка теорема на съждителното смятане е тавтология, т. е. приема стойност *истина* при всяка оценка на съждителните променливи. Доказателството на тази теорема е сравнително просто въпреки, че на пръв поглед изглежда доста обемно. В този параграф ще докажем обратната теорема, а именно, че всяка тавтология е теорема на съждителното смятане. Доказатлеството на тази теорема е далеч по-сложно и изисква един по-задълбочен анализ на синтактичната структура на тавтологиите. Ще направим този анализ в следващите четири почти очевидни леми.

Лема 1.9. Нека $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, са формули, такива че $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология. Нека още всяка една от формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$ е съждителна променлива или отрицание на съждителна променлива. Тогава $\mathbf{A}_i$ е $\neg\mathbf{A}_j$ за някои $i \neq j$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология и всяка една от формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$ е съждителна променлива или отрицание на съждителна променлива. Да допуснем, че формулите $\mathbf{A}_i$ и $\neg\mathbf{A}_j$ са различни за всяко $i \neq j$. Тогава можем да дефинираме оценка на променливите V по следния начин:

$$V(P_k) \equiv \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{ако } \mathbf{A}_i \text{ е } P_k \text{ за някое } i \\ \mathbb{T}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Така $V(P_k) \equiv \mathbb{F}$ точно тогава, когато P_k е $\mathbf{A}_i$ за някое $1 \leq i \leq n$ и следователно $\tilde{V}(\mathbf{A}_j) = \mathbb{F}$ за всяко $1 \leq j \leq n$. Оттук $\tilde{V}(\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{F}$, което противоречи на избора на формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$.

□

Лема 1.10. Нека $\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, са формули, такива че формулата $(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология. Тогава формулата $\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ също е тавтология.

Доказателство. Нека $(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология и нека V е произволна оценка на променливите. Тогава $\tilde{V}((\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$ и значи поне една от формулите $\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}'$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$ приема стойност истина при оценката V. Ако това е някоя от формулите $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_n$, то тогава $\tilde{V}(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$. Нека сега $\tilde{V}(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') = \mathbb{T}$. Тогава поне една от формулите $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ е истина и следователно отново $V(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$.

□

Лема 1.11. Нека $\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, са формули, такива че формулата $\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология. Тогава формулите $\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ и $\neg\mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ също са тавтологии.

Доказателство. Нека $\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология и нека V е оценка на променливите. Тогава $\tilde{V}(\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$ и значи поне една от формулите $\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}')$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ приема стойност истина при оценката V. Ако това е някоя от формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, то тогава $\tilde{V}(\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$ и $\tilde{V}(\neg\mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$. Нека сега $\tilde{V}(\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}')) = \mathbb{T}$. Тогава $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \tilde{V}(\mathbf{B}') = \mathbb{F}$ и значи $\tilde{V}(\neg\mathbf{A}') = \tilde{V}(\neg\mathbf{B}') = \mathbb{T}$. Следователно $\tilde{V}(\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$ и $\tilde{V}(\neg\mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$. □

Лема 1.12. Нека $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, са формули, такива че формулата $\neg\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология. Тогава формулата $\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ също е тавтология.

Доказателство. Нека $\neg\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология и нека V е оценка на променливите. Тогава $\tilde{V}(\neg\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$ и значи поне една от формулите $\neg\neg\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ приема стойност истина при оценката V. Ако това е някоя от формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, то тогава $\tilde{V}(\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$. Нека сега $\tilde{V}(\neg\neg\mathbf{A}') = \mathbb{T}$. Тогава $\tilde{V}(\neg\mathbf{A}') = \mathbb{F}$ и значи $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \mathbb{T}$. Следователно $\tilde{V}(\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbb{T}$.

□

С помощта на горните леми ще докажем, че всяка тавтология от вида $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$, където $n \geq 2$, е теорема на съждителната логика.

Теорема 1.13. Нека $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, са формули, такива че формулата $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ е тавтология. Тогава $\vdash \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по общия брой на логическите символи $\vee$ и $\neg$, участващи във формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Нека първо предположим, че всяка една от формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ е съждителна променлива или отрицание на съждителна променлива. Тогава съгласно Лема 1.9 $\mathbf{A}_i$ е $\neg\mathbf{A}_j$ за някои $i \neq j$. Оттук $\vdash \mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j$, тъй като $\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j$ е съждителна аксиома. Следователно $\vdash \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ съгласно (ПП).

Нека сега някоя от формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ не е нито съждителна променлива, нито отрицание на съждителна променлива. Съгласно (ПП) без ограничение можем да считаме, че това е $\mathbf{A}_1$. Така $\mathbf{A}_1$ е или дизюнкция на две формули, или е отрицание на формула, която не е съждителна променлива. Нека първо да предположим, че $\mathbf{A}_1$ е дизюнкция на две формули, т.е. $\mathbf{A}_1$ е формулата $\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}'$ за някои формули $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$. Тъй като

$$(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

е тавтология, съгласно Лема 1.10 формулата

$$\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

също е тавтология. От друга страна общият брой на символите $\vee$ и $\neg$, съдържащи се във формулите $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ е с единица по-малък от общия брой на символите $\vee$ и $\neg$ във формулите $\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, откъдето съгласно индукционното предположение

$$\vdash \mathbf{A}' \vee \mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n.$$

Оттук и правило (ПА) получаваме

$$\vdash (\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n.$$

Нека сега $\mathbf{A}_1$ е отрицание на формула, различна от съждителна променлива, т.е. отрицание на дизюнкция или отрицание на отрицание. Нека първо $\mathbf{A}_1$ е $\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}')$. От това, че формулата

$$\neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

е тавтология и Лема 1.11, имаме, че формулите

$$\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n \text{ и } \neg\mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

също са тавтологии. Общият брой на символите $\vee$ и $\neg$, участващи във формулите $\neg\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$, а така също и във формулите $\neg\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$, е строго по-малък от броя на на символите $\vee$ и $\neg$, участващи във формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$. Оттук и индукционното предположение

$$\vdash \neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n \text{ и } \vdash \neg\mathbf{B}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n,$$

откъдето

$$\vdash \neg(\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}') \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

съгласно (ПОД).

Накрая, нека $\mathbf{A}_1$ е $\neg\neg\mathbf{A}'$ за някоя формула $\mathbf{A}'$. Тъй като формулата

$$\neg\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

е тавтология, съгласно Лема 1.12 формулата

$$\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

също е тавтология. От друга страна общият брой на символите $\vee$ и $\neg$, участващи във формулите $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$, е с две по-малък от този на символите $\vee$ и $\neg$, участващи във формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$. Оттук, съгласно индукционното предположение,

$$\vdash \mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n,$$

откъдето

$$\vdash \neg\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$$

съгласно Твърдение (ПДО).

$\square$

Вече сме готови да докажем теоремата за пълнота на съждителното смятане.

Теорема 1.14 (Пълнота на съждителното смятане)**.** Нека формулата $\mathbf{A}$ е тавтология. Тогава $\vdash \mathbf{A}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е тавтология. Тогава $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ също е тавтология и значи $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ съгласно предната теорема. Оттук и (ПС) имаме $\vdash \mathbf{A}$.

□

Ще формулираме едно важно следствие на теоремата за пълнота, което ще използваме многократно в следващите глави. За целта се нуждаем от следното понятие.

Дефиниция 1.15. Нека $n \geq 0$. Ще казваме, че формулата $\mathbf{A}$ е *тавтологично следствие* на формулите $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\ldots$, $\mathbf{A}_n$, ако формулата $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология.

Теорема 1.16 (За тавтологиите)**.** Нека $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\ldots$, $\mathbf{A}_n$, $n \geq 0$ и нека $\vdash \mathbf{A}_i$ за $1 \leq i \leq n$. Тогава $\vdash \mathbf{A}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\ldots$, $\mathbf{A}_n$. Тогава $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология и следователно $\vdash \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$. Оттук и $\vdash \mathbf{A}_i$ за $1 \leq i \leq n$ след многократно прилагане на (MP) получаваме $\vdash \mathbf{A}$.

□