Глава 2

Предикатно смятане от първи ред

2.1 Език на предикатното смятане от първи ред

Езикът на предикатното смятане от първи ред се състои от *индивидни променливи*, *логически символи*, *нелогически символи*, *термове* и *формули*. Индивидните променливи са фиксиран безкраен списък от символи. В рамките на тази книга индивидните променливи ще бъдат

$$x, y, z, x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 \ldots$$

Логическите символи, които изполвахме в предната глава, са логически символи и на езиците от първи ред. Отново $\vee$ и $\neg$ играят ролята на основни символи, а символите &, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ ще дефинираме като съкращения. Освен символите, служещи за връзки между различните съждения, за логически символи ще считаме символа за равенство $=$ (който ще считаме за двуместен предикатен символ) и квантора за съществуване $\exists$.

Нелогическите символи се разделят на две категории — *функционални* и *предикатни*. Ролята на функционални и предикатни символи може да се играе от кой да е набор от символи, различни от символите, фиксирани за индивидни променливи и логически символи. С всеки функционален и предикатен символ трябва да бъде свързано естествено число, което ще наричаме местност на символа. Когато говорим абстрактно за език от първи ред функционалните символи ще означаваме с $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, ..., а предикатните с $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, ... Стандартни примери за функционални символи от алгебрата и анализа са: 0-местните 0, 1, 2, ..., както и e и π; 1-местните sin, cos, tg и ctg; двуместните . и $+$. Стандартни примери за предикатни символи са: 2-местните $<$, $\leq$ и $||$; 3-местния $\equiv \mod$.

Използвайки променливите и функционалните символи на езика строим *термовете* на езика по следната схема:

1. Всяка променлива е терм;

2. Ако $\mathbf{f}$ е n-местен функционален символ, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ са термове, то $\mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$ е терм.

Ясно е, че за всеки език от първи ред x, y, z, x_0, y_0, z_0 ... са термове. Ако 0 е символ на езика (0-местен), то 0 е терм на езика. Ако допълнително предположим, че $+$ е символ на езика (2-местен), то тогава

$$+00, +0x \text{ и } ++x+0y+00$$

също са термове.

Лема 2.1. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са термове. Ако $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$ то $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

Доказателство. Нека първо отбележим, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ съдържат поне един символ. Ще докажем твърдението на лемата с иднукция по дължината на $\mathbf{b}$.

(i) $\mathbf{b}$ се състои от един символ. Тогава очевидно $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

(ii) $\mathbf{b}$ се състои от повече от един символ. Тогава $\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Тъй като $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$, то $\mathbf{a}$ започва със символа $\mathbf{f}$ и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ за някои термове $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Оттук и това, че $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$, следва, че $\mathbf{a}_1$ е префикс на $\mathbf{b}_1$ или $\mathbf{b}_1$ е префикс на $\mathbf{a}_1$. Но термовете $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ имат дължини по-малки от дължината на $\mathbf{b}$ и следователно, съгласно индукционното предположение $\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{b}_1$. Сега, прилагайки това разсъждение още $n-1$ пъти, последователно получаваме $\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{b}_3$,..., $\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{b}_n$ и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$

□

Теорема 2.2. Нека $\mathbf{a}$ е терм. Тогава е вярно точно едно от следните твърдения:

1. Съществува единствена променлива $\mathbf{x}$, такава че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{x}$
2. Съществуват единствен (n-местен) функционален символ $\mathbf{f}$ и единствени термове $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, такива че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n$.

Доказателство. Нека първо $\mathbf{a}$ съдържа един единствен символ. Тогава този символ е или променлива, или 0-местен функционален символ и те са еднозначно определени.

Нека сега $\mathbf{a}$ съдържа повече от един символ. Тогава първия символ на $\mathbf{a}$ е функционален символ. Нека този символ е $\mathbf{f}$ и неговата местност е равна на n. Да предположим, че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}'_1\mathbf{a}'_2 \dots \mathbf{a}'_n$. Тогава

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a}'_1\mathbf{a}'_2 \dots \mathbf{a}'_n$$

и следователно или $\mathbf{a}_1$ е префикс на $\mathbf{a}'_1$, или $\mathbf{a}'_1$ е префикс на $\mathbf{a}_1$. Съгласно предната лема $\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{a}'_1$. Оттук

$$\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a}'_2\mathbf{a}'_3 \dots \mathbf{a}'_n$$

и следователно или $\mathbf{a}_2$ е префикс на $\mathbf{a}'_2$, или $\mathbf{a}'_2$ е префикс на $\mathbf{a}_2$. Съгласно предната лема $\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}'_2$. Повтаряйки последователно това разсъждение още $n-2$ пъти, окончателно получаваме

$$\mathbf{a}_i \equiv \mathbf{a}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

което трябваше да докажем.

□

Сега използвайки термовете, предикатните и логическите символи дефинираме формулите на езика чрез следната индукция:

1. Ако **p** е n-местен функционален символ (символът $=$ е двуместен предикатен символ), а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ са термове, то $\mathbf{pa}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$ е формула (атомарна формула).
2. Ако **B** е формула, то $\neg\mathbf{B}$ е формула.
3. Ако **B** и **C** е формула, то $\vee\mathbf{BC}$ е формула.
4. Ако **B** е формула, а **x** е променлива, то $\exists\mathbf{xB}$ е формула.

Ако 0 и $+$ са съответно 0-местен и 2-местен функционални символи, а $\leq$ е двуместен предикатен символ на езика, то тогава

$$\leq 0 + xy,\ \vee = x + +0x0 \leq x0,\ \neg\exists x \vee \neg = x0 = +xy + yz$$

са форули на езика. Подобно на термовете, за формулите на езика в сила са следните две твърдения.

Лема 2.3. Ако **A** и **B** са формули на език от първи ред и **A** е префикс на **B**, то $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$

Теорема 2.4. Нека **A** е формула на език от първи ред. Тогава в сила е точно едно от следните твърдения:

1. Съществуват единствени n-местен предикатен символ **p** и термове $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$, такива че $\mathbf{A} \equiv \mathbf{pa}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$.
2. Съществува единствена формула **B**, такава че $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$.
3. Съществуват единствени формули **B** и **C**, такива че $\mathbf{A} \equiv \vee\mathbf{BC}$.
4. Съществуват единствени променлива **x** и формула **B**, такива че $\mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{xB}$.

Ще казваме, че поддумата α на думата β е *подтерм*, ако α е терм. В сила са следните синтактични свойства на подтермовете на даден терм.

Лема 2.5. Всеки символ на терма **a** е начало на единствен подтерм на **a**.

Доказателство. Единствеността следва от Лема 2.1. За да докажем съществуването, нека първо забележим, че ако изберем първия символ на **a**, то търсеният подтерм е самото **a**. Нека сега сме избрали символ, различен от първия. В този случай **a** има поне два символа и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{fa}_1\ldots\mathbf{a}_n$ за някой n-местен функционален символ **f** и термове $\mathbf{a}_1$,…, $\mathbf{a}_n$, за които теоремата вече е доказана. Тогава избраният символ е символ от терма $\mathbf{a}_k$ за някое $1 \leq k \leq n$, откъдето той е начало на подтерм на $\mathbf{a}_k$ и значи е начало на подтерм на **a**.

□

Теорема 2.6. Нека α е непразен суфикс на терма $\mathbf{a}$, β е непразен префикс на терма $\mathbf{b}$. Тогава думата $\alpha\beta$ не е терм.

Доказателство. Съгласно лемата първият символ на α е начало на единствен подтерм $\mathbf{a}'$ на $\mathbf{a}$. Да допуснем, че $\alpha\beta$ е терм. Тогава $\alpha\beta$ и $\mathbf{a}'$ са сравними и съгласно Лема 2.1 те съвпадат. Но тъй като β е непразна дума, то думата $\alpha\beta$ е по-дълга от $\mathbf{a}'$, което е невъзможно. Следователно $\alpha\beta$ не е терм.

□

Следствие 2.7. Нека $\mathbf{a} \equiv \mathbf{fa}_1 \dots \mathbf{a}_n$ е терм, където $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ са термове. Тогава, ако $\mathbf{a}'$ е подтерм на $\mathbf{a}$, то е в сила точно едно от следните:

- $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$;
- $\mathbf{a}'$ е подтерм на $\mathbf{a}_k$ за някое $1 \leq k \leq n$.

Ще казваме, че поддумата α на думата β е *подформула*, ако α е формула. Аналогично на горните две твърдения, можем да докажем следните две основни синтактични свойства на подформулите.

Лема 2.8. Всеки символ на формулата $\mathbf{A}$ е начало на единствена поддума на $\mathbf{A}$, която е терм или формула.

Теорема 2.9. Нека α е непразен суфикс на формулата $\mathbf{A}$, а β е непразен префикс на формулата $\mathbf{B}$. Тогава думата $\alpha\beta$ не е нито терм, нито формула.

Нека да отбележим, че от тази теорема следва, че ако $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и α е подформула (терм) на $\mathbf{A}$, то или α съвпада с $\mathbf{A}$, или α е подформула (терм) на $\mathbf{B}$, или α е подформула (терм) на $\mathbf{C}$. Този факт ще бъде използван многократно в следващите ни разглеждания.

Освен съкращенията, въведени в предишната глава, ще използваме още следните:

1. Когато $\mathbf{f}$ е двуместен функционален символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пишем $(\mathbf{a}\,\mathbf{f}\,\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{fab}$;
2. Когато $\mathbf{p}$ е двуместен предикатен символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пишем $(\mathbf{a}\,\mathbf{p}\,\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{pab}$;
3. Когато $\mathbf{p}$ е двуместен предикатен символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пишем $(\mathbf{a}\,\not{\mathbf{p}}\,\mathbf{b})$ вместо $\neg(\mathbf{a}\,\mathbf{p}\,\mathbf{b})$;
4. Ще пишем $\forall\mathbf{x}$ вместо $\neg\exists\mathbf{x}\neg$.