ТЕМА 3: РЕЛАЦИИ

Дефиниция на n-арна релация

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

Бинарна релация: $R \subseteq A \times B$

Свойства на бинарните релации от вида: $R \subseteq A \times A$

- ***рефлексивност:*** $\forall a \in A((a,a) \in R)$
- ***антирефлексивност:*** $\forall a \in A((a,a) \notin R)$
- ***симетричност:*** $\forall a \forall b \in A((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$
- ***антисиметричност:*** $\forall a \forall b \in A, a \neq b((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R)$
- ***силна антисиметричност:***
  $\forall a \forall b \in A, a \neq b((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R) \wedge ((a,b) \notin R \rightarrow (b,a) \in R)$
- ***транзитивност:***
  $\forall a \forall b \forall c \in A((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R)$

Представяне на бинарни релации с бинарни матрици

Нека $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ са две множества.
Бинарна релация $R \subseteq X \times Y$ се представя с бинарна матрица от вида:

$$A(m,n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

където

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & (x_i, y_j) \in R \\ 0 & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Представяне на бинарни релации с диаграми

Релации на еквивалентност. Класове на еквивалентност

Релации на наредба – частична и пълна

Обратна релация $R^{-1} = \{(a,b) | (b,a) \in R\}$

Допълнение на релация $\overline{R} = \{(a,b) | (a,b) \notin R\}$

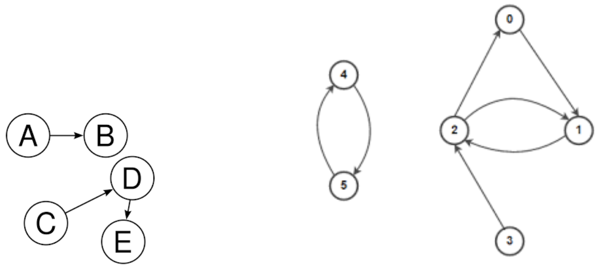
Композиция на релации $S \circ R = \{(a,c) | \exists b, (a,b) \in R, (b,c) \in S\}$

Рефлексивно, симетрично и транзитивно затваряне на релация

Задачи за упражнение:

Задача 1:. Дадени са множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6\}$ и релацията $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2)\}$
Представете релацията с диаграма и с бинарна матрица.

Задача 2: Определете свойствата на релациите, зададени със следните диаграми:



Задача 3: Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Начертайте диаграма на всяка от следните бинарни релации с домейни множеството A и определете какви свойства притежава:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$

c) $R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

d) $R_4 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4)\}$

e) $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

Задача 4: Определете какви свойства притежава всяка от следните релации:

a) $R_1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : (a - b) \in \mathbb{Z}\}$

b) $R_2 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} = \{(a, b) : a \subseteq b\}$

c) $R_3 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} = \{(a, b) : a \cap b \neq \emptyset\}$

d) $R_4 = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R} : a \leq b\}$

e) $R_5 = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R} : a + b \geq 5\}$

Задача 5: Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Дайте пример на релация над A със следните свойства:

a) Рефлексивна, не антисиметрична, не транзитивна;

b) Не рефлексивна, не симетрична, не транзитивна;

c) Симетрична и транзитивна;

d) Симетрична и антисиметрична;

e) Нито симетрична, нито антисиметрична.

Задача 6: Коя е матрицата, представяща релацията $\Delta_A = \{(a, a), \forall a \in A\}$

Задача 7: Каква е матрицата, представяща релация със съответното свойство:

a) симетричност;

b) антисиметричност;

c) силна антисиметричност.

Задача 8: Определете верния отговор: Множеството на антисиметричните релации над множеството А е подмножество на:

a) симетричните релации;

b) несиметричните релации;

c) нито едно от горните множества.

Задача 9: Дадена е релацията $R \subseteq A \times A$. Проверете кои от следните твърдения са верни:

a) Ако релацията R е рефлексивна, то релациите $\overline{R}$ и R^{-1} не са рефлексивни.

b) Ако релацията R е симетрична, то релациите $\overline{R}$ и R^{-1} са симетрични.

c) Ако релацията R е антисиметрична, то релациите $\overline{R}$ и R^{-1} са антисиметрични.

d) Ако релацията R е силно антисиметрична, то релациите $\overline{R}$ и R^{-1} са силно антисиметрични.

e) Ако релацията R е транзитивна, то релациите $\overline{R}$ и R^{-1} не са транзитивни.

Задача 10: Дадени са релациите $R \subseteq A \times A$ и $S \subseteq A \times A$. Проверете верността на следните твърдения:

a) Ако R и S са симетрични, то и $R \cup S$ е симетрична.
b) Ако R и S са транзитивни, то и $R \cup S$ е транзитивна.
c) Ако $R \cup S$ е рефлексивна, то R или S е рефлексивна.
d) Ако $R \cap S$ е рефлексивна, то R и S са рефлексивни.
e) Ако R и S са антисиметрични, то и $R \cap S$ е антисиметрична.

Задача 11: Определете кои от шестте основни свойствата притежава всяка от следните релации:

a) Релацията „по-малко” в множеството на реалните числа;

b) Релацията „по-малко или равно” в множеството на реалните числа;

c) Празната релация в произволно непразно множество;

d) Релацията $A \times A$, където A е произволно непразно множество;

e) Релацията $\subseteq$ в множеството $2^{\mathbb{N}}$.

Задача 12: Релацията R е дефинирана в множеството на всички хора по следния начин: $(a, b) \in R$ точно тогава, когато a и b са женени, или са били женени. Кое от следните твърдения е вярно:

a) R е транзитивна;

b) за $\forall a \forall b \forall c ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \notin R)$;

c) нито едно от горните две.

Задача 13: Дадена е релацията R, която е симетрична и антисиметрична.

a) докажете, че релацията е транзитивна;

b) опишете вида на матрицата, която представя релацията.

Задача 14: Докажете, че следната релация е релация на еквивалентност и определете класовете на еквивалентност:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a + b = 2k\}$

b) $A = \{0, 5, 8, 9, 10, 11\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a - b = 3k\}$

c) $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a \equiv b \ (mod\ 5)\}$

e) $A = \{1, 9, 21, 44, 50, 99, 101\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : (a - b) \equiv 0 \ (mod\ 10)\}$

Задача 15: Дадено е множеството $A = \{1, 3, 5, 12, 17, 18\}$ и релацията $R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : (a + b) = 0 \ mod\ 2\}$. Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се намерят класовете на еквивалентност.

Решение:

1. $\forall a \in A : a + a = 2a = 0 \ mod\ 2$, следователно релацията R е рефлексивна.

2. $\forall a \forall b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$, тъй като $a + b = b + a$, следователно релацията R е симетрична.

3. Нека $a, b, c \in A$ са такива, че $a + b = 0 \ mod\ 2$ и $b + c = 0 \ mod\ 2 \Rightarrow$

$a + b = 2k, k \in \mathbb{Z}, b + c = 2r, r \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow$

$a + c = (a + b) + (b + c) - 2b = 2k + 2r - 2b = 2p, p \in \mathbb{Z}$

И така за произволни $a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$, следователно релацията е транзитивна.

Релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност. Тя разбива множеството A на два класа на еквивалентност, като във всеки един от тях попадат числата, които имат еднаква четност.

$R_{[1]} = \{1, 3, 5, 17\}, \quad R_{[12]} = \{12, 18\}$

Задача 16: Релацията $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е дефинирана по следния начин:

$R = \{(x, y) : 3|(2x - 5y)\}$

Докажете, че R е релация на еквивалентност и опишете класовете на еквивалентност.

Решение: Ще проверим дали релацията притежава свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност.

1. *Рефлексивност:* Нека x е произволен елемент на домейна $\mathbb{Z}$. Двойката (x, x) принадлежи на релацията точно тогава, когато $3|(2x - 5x)$, което очевидно е вярно. Следователно, релацията е рефлексивна.

2. *Симетричност:* Нека x и y са два произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, които са в релация. Следователно, $3|2x - 5y$, т.е. $\exists k \in \mathbb{Z} : 2x - 5y = 3k$. За да проверим принадлежността на двойката (y, x) към релацията ще изследваме дали $3|2y - 5x$.

$2y - 5x = (-3x - 3y) - (2x - 5y) = 3(-x - y) - 3k = 3(-x - y - k) = 3p, p \in \mathbb{Z}$

Следавателно $3|2y - 5x$, т.е. $(y, x) \in R$

Следователно релацията е симетрична.

3. *Транзитивност:* Нека x, y и z са три произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, такива че $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Ще проверим дали от това следва, че $(x, z) \in Z$.

$(x, y) \in R \Rightarrow 3|2x - 5y \Rightarrow 2x - 5y = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$(y, z) \in R \Rightarrow 3|2y - 5z \Rightarrow 2y - 5z = 3r, r \in \mathbb{Z}$

$2x - 5z = (2x - 5y) + (2y - 5z) + 3y = 3k + 3r + 3y = 3(k + r + y) = 3p, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$3|2x - 5z \Rightarrow (x, z) \in R$

От това следва, че релацията е транзитивна.

И така, релацията R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Класовете на еквивалентност на релацията са:

$R_{[0]} = \{x : x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[1]} = \{x : x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[2]} = \{x : x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

Задача 17: Дадена е релацията $R \subseteq 2^A \times 2^A = \{(X, Y) : |X| = |Y|\}$, $A = \{a_1, ..., a_{20}\}$.

а) Докажете, че R е *релация на еквивалентност*

Решение:

1. *Рефлексивност:* Нека $X \in 2^A$. Тъй като $|X| = |X| \Rightarrow (X, X) \in R$. Следователно, релацията е рефлексивна.

2. *Симетричност:* Нека $X, Y \in 2^A, (X, Y) \in R$. Следователно $|X| = |Y| \Rightarrow$
$|Y| = |X| \Rightarrow (Y, X) \in R$. От това следва, че релацията е симетрична.

3. *Транзитивност:* Нека $X, Y, Z \in 2^A$, като $(X, Y) \in R \wedge (Y, Z) \in R \Rightarrow$
$|X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \Rightarrow$
$|X| = |Z| \Rightarrow (X, Z) \in R$.

Следователно, релацията е транзитивна.

Релацията R е симетрична, рефлексивна и транзитивна, следователно е релация на еквивалентност.

б) Опишете класовете на еквивалентност на R

Решение:

Класовете на еквивалетност са:

$[\emptyset] = \{X \in 2^A : |X| = 0\}$,

$[\{a_1\}] = \{X \in 2^A : |X| = 1\}$,

...

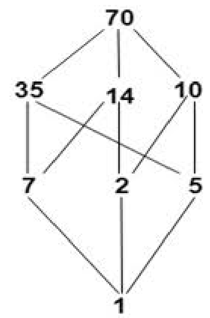
$[\{a_1, a_2, ..., a_{20}\}] = \{X \in 2^A : |X| = 20\}$

Задача 18: Проверете, че следната релация е релация на наредба, определете вида ѝ – частична или пълна и я представете с диаграма на Hasse. За всяка от частичните наредби намерете пълна наредба, която я съдържа.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a \leq b\}$

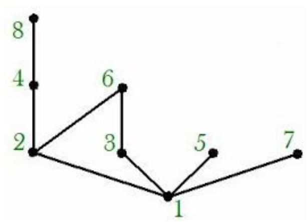
b) $A = \{1, 2, 6, 12, 24\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a|b\}$

c) $A = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a|b\}$



d) $A = \{3, 5, 6, 7, 14, 15, 40, 42, 120\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a|b\}$

e) $R \subseteq I_8 \times I_8, R = \{(a, b) : a|b\}$



f) $A = \{a, b, c\}, R \subseteq 2^A \times 2^A, R = \{(a, b) : a \subseteq b\}$

g) $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A, R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) : a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2\}$

Задача 19: Докажете, че следната релация е релация на частична наредба:

a) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N};\quad R = \{(a, b) : a|b\}$

b) $R \subseteq 2^A \times 2^A;\quad R = \{(a, b) : a \subseteq b\}$

c) $R \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^2;\quad R = \{((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) : a_1 \leq a_2, b_1 \geq b_2, c_1 \leq c_2\}$

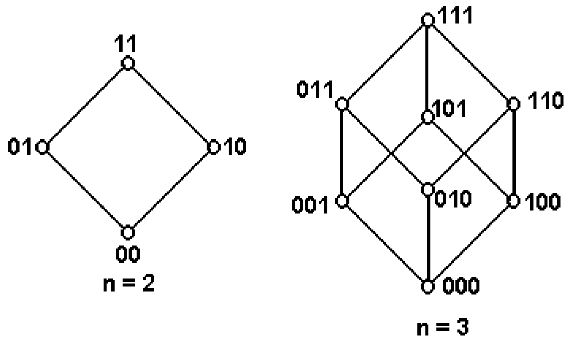
Задача 20: Нека $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Докажете, че релацията
$R_{\preceq} \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) | \forall i \in I_n, a_i \leq b_i\}$,
е релация на *частична наредба*, но не е релация на *пълна наредба*. Представете релацията чрез диаграма на Хасе за $n = 2, 3$.

Решение:

1. *Рефлексивност:* Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n) \in J_2^n$ Вярно е, че $\forall i \in I_n, a_i \leq a_i \Rightarrow (\alpha, \alpha) \in R_{\preceq}$. Следователно, релацията е рефлексивна.

2. *Антисиметричност:* Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n) \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R$.
Ако допуснем, че $(\beta, \alpha) \in R_{\preceq} \Rightarrow$
$\forall i \in I_n (a_i \leq b_i \wedge b_i \leq a_i) \Rightarrow$
$\forall i \in I_n (a_i = b_i) \Rightarrow \alpha = \beta$.
Следователно, релацията е антисиметрична.
Релацията не е силно антисиметрична, защото различните елементи $\alpha = (0, 1, 0, ..., 0)$ и $\beta = (1, 0, 0, ..., 0) \in J_2^n$ са несравними, т.е. $(\alpha, \beta) \notin R_{\preceq}$ и $(\beta, \alpha) \notin R_{\preceq}$

3. *Транзитивност:* Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n), \gamma = (c_1, ..., c_n) \in J_2^n$, $(\alpha, \beta) \in R_{\preceq}, (\beta, \gamma) \in R_{\preceq}$.
Следователно $\forall i \in I_n (a_i \leq b_i \wedge b_i \leq c_i) \Rightarrow$
$\forall i \in I_n, a_i \leq c_i \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R_{\preceq}$.
Следователно, релацията е транзитивна.
Следователно, $R_{\preceq}$ е релация на частична наредба, но не е релация на пълна наредба.



Диаграми на Хасе

Задача 21: Намерете минималните и максимални елементи на следните релации:

a) $A = \{2, 4, 5, 10\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a|b\}$

b) $A = \{2, 4, 12\}, R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : a|b\}$

c) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, R = \{(a, b) : a|b\}$

Задача 22: Дадено е множеството $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и следната релация:
$R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) : 5|a + 2b\}$
Да се представи релацията с диаграма и да се намери нейното рефлексивно, симетрично и транзитивно затваряне.

Задача 23: Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Намерете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на следните релации с домейни това множество:

a) $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 3)\}$

c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

d) $R_4 = \{(1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

Задача 24: Намерете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на релациите "по-малко от" и "по-малко или равно на" в множеството $\mathbb{R}$.