ТЕМА 5: КОМБИНАТОРИКА
Основни принципи на Изброителната Комбинаторика

Принцип на Дирихле: Дадени са две множества X и Y: $|X| = n, |Y| = m, n > m$. Вярно е следното: $\forall f : X \to Y(\exists x_1 \exists x_2 \in X(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)))$.

Модификация: (Принцип на чекмеджетата) Нека имаме n предмета и m чекмеджета $(n > m)$. Както и да разположим предметите в чекмеджетата, ще има поне едно чекмедже, което съдържа поне два предмета.

Принцип на биекцията: Нека $|X| = n$ и $|Y| = m$. Съществува функция биекция $f : X \to Y$ точно тогава, когато $m = n$.

Принцип на събирането: Нека $\mathfrak{R} = \{S_i : i \in I\}$ е разбиване на множеството A. Тогава $|A| = \sum_{i \in I} |S_i|$.

Модификация: Ако за да се изпълни задачата t трябва да се изпълни точно една от задачите $t_1, t_2, ...t_n$, които се изпълняват съответно по $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ начина, то задачата t се изпълнява по $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ начина.

Принцип на изваждането: (Принцип на допълнението) Нека A е крайно множество и $A' \subseteq A$ е негово подмножество. Тогава $|A \setminus A'| = |A| - |A'|$.

Принцип на умножението: (Принцип на декартовото произведение) Нека X и Y са крайни множества, $|X| = n, |Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X|.|Y| = n.m$.

Модификация: Ако за да се изпълни задачата t трябва да се изпълни всяка от независимите задачи $t_1, t_2, ...t_n$, които се изпълняват съответно по $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ начина, то задачата t се изпълнява по $\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n$ начина.

Модификация: Ако задачите t_i се изпълняват последователно, то α_i показва по колко начина се изпълнява t_i в зависимост от изпълнението на $t_1, ..., t_{i-1}$.

Следствие 1: Нека са дадени множествата $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, ..., |A_n| = m_n$. Тогава

$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = m_1.m_2...m_n$.

Следствие 2: Нека $|A| = m$. Тогава $|A^n| = m^n$.

Принцип на делението: Ако при преброяване на елементите на множеството A всеки елемент е преброен $m, m > 0$ пъти и е получено числото k, то $|A| = k/m$.

Задачи за упражнение:

Задача 1: Колко са двоичните вектори с дължина n, които започват и завършват с различни символи.

<u>*Решение:*</u> За да решим задачата ще приложим основните принципи за броене. Търсеното множество X може да се представи като: $X = A \cup B$, където

$A = \{$двоичните вектори, започващи с 1 и завършващи с 0$\}$

$B = \{$двоичните вектори, започващи с 0 и завършващи с 1$\}$

Построяването на произволен вектор от A е задача, чието изпълнение се свежда до изпълнението на всяка от n задачи за запълване на съответната позиция във вектора. Задачите за запълване на първата и последната позиции се решават по единствен начин – там трябва да има съответно 1 или 0. Всяка от останалите $n-2$ задачи се решава по два начина – в съответната позиция можем да поставим 0 или 1. И така, прилагайки принципа на произведението, получаваме:

$|A| = 1.2...2.1 = 2^{n-2}$

Аналогично, за B получаваме:

$|B| = 1.2...2.1 = 2^{n-2}$

Множествата A и B нямат общи елементи, така че можем да приложим принципа на събирането:

$|A \cup B| = |A| + |B| = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$

Задача 2: Колко са плочките на доминото.

Задача 3: В множество от n човека е дефинирана релация познанство, която е симетрична. Да се докаже, че в множеството има поне двама души, които имат равен брой познати.

<u>*Доказателство:*</u> В група от n човека всеки може да има от нула до $n-1$ познати. Да означим с M множеството на хората, а с $f : M \to Jn$ функцията, която съпоставя на всеки човек броя на познатите му.

1. Ако има човек с нула познати, то в групата не може да има човек с $n-1$ познати. Следователно функцията ще изглежда така: $f : M \to J_{n-1}$.

2. Ако няма човек с нула познати, то функцията ще е: $f : M \to I_{n-1}$

И в двата случая съгласно принципа на Дирихле тази функция не е инекция, т.е. има двама човека от групата, които имат равен брой познати.

Задача 4: Да се намери броят на нечетните числа в интервала $[1000, 10000]$, които нямат повтарящи се цифри.

<u>*Решение:*</u> Търсените числа са всички четирицифрени нечетни числа с различни цифри. За да е нечетно числото, трябва за последната позиция да изберем една от петте десетичните цифри. Цифрата на първа позиция не може да е нула и трябва да е различна от избраната за последна позиция, така че за нея има осем възможности. За цифрите на втора и трета позиция има съответно осем и седем възвожности за избор без повторение.

Така крайният резултат е $8 * 8 * 7 * 5 = 2240$

Задача 5: Да се намери броят на четните числа в интервала $[1000, 10000]$, които нямат повтарящи се цифри.

Основни Комбинаторни Конфигурации

Нека е дадено базово множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, от чиито елементи ще правим извадки с или без повторение, с или без наредба, получавайки различни комбинаторни конфигурации.

Комбинаторни конфигурации с наредба без повторение.

$\mathcal{K}_H(n,k) = \{$ наредените k–орки от елементи на A без повторение$\}$
ще наричаме **вариации** от n елемента k-ти клас, броят ще бележим с V_n^k. С прилагане на принципа на умножението получаваме:

$$V_n^k = n.(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пермутации на n елемента - частен случай на вариации, при които $n = k$.

$$P_n = n!$$

Комбинаторни конфигурации без наредба и без повторение.

$\mathcal{K}(n,k) = \{$ ненаредените k–орки от елементи на A без повторение$\}$
ще наричаме **комбинации** от n елемента k-ти клас и ще бележим с C_n^k техния брой. С прилагане на принципа на делението получаваме:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Комбинаторни конфигурации с наредба и с повторение.

$\mathcal{K}_{H,\Pi}(n,k) = \{$ наредените k–орки от елементи на A с повторение$\}$
ще наричаме **вариации** с повторение от n елемента k-ти клас и броят им ще бележим с A_n^k. С прилагане на принципа на умножението получаваме:

$$A_n^k = n.n...n = n^k$$

Комбинаторни конфигурации без наредба и с повторение.

$\mathcal{K}_{\Pi}(n,k) = \{$ ненаредените k–орки от елементи на A с повторение. $\}$
ще наричаме **комбинации с повторение** от n елемента k-ти клас и ще бележим с S_n^k броя им. Както ще докажем по-късно

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

Задачи за упражнение:

Задача 1: Колко са двоичните вектори с дължина n?

Задача 2: Колко различни фиша могат да се попълнят в играта 6 от 49?

Задача 3: Колко са различните символни низове:

a) над азбуката $\{0,1\}$ с дължина 10 и точно 4 единици?

b) над азбуката $\{a,b,c\}$ с дължина 8 и най-много 4 букви a?

c) над азбуката $\{a,b,c\}$ с дължина 10, с 4 букви a и 3 букви b?

Задача 4: Колко са различните булеви вектори с 15 нули и 6 единици, такива че след всяка единица има нула?

Решение: За да изпълним условието може да групираме всяка от шестте единици с по една нула след нея в нов елемент - да го наречем A. Така нашата задача се свежда до преброяване на вектори, които имат 6 елемента A и 9 елемента - нули. Техният брой е C_{15}^{6}.

Задача 5: От колода 52 карти се вадят 10. Колко са различните извадки, в които има:

a) поне едно асо;

b) точно едно вале;

c) не по-малко от две дами;

d) точно три седмици.

Задача 6: Колко различни числа могат да се запишат в p-ична бройна система:

a) с n значещи цифри;

b) с n цифри.

Задача 7: Колко различни идентификатора с дължина най-много 5 могат да се използват в езиците за програмиране, които познавате?

Задача 8:. По колко различни начина могат да се поставят 5 червени и 7 сини топки в 20 различни кутии без да има значение редът на поставяне, като:

a) в кутия има не повече от една топка;

b) в кутия има не повече от една топка от един цвят.

Задача 9: Колко думи могат да се съставят над азбуката $\{a, b, c\}$, които изпълняват следното условие:

a) съдържат 5 букви a, 3 букви b и 4 букви c;

b) имат дължина 15, най-много 5 букви a и след всяка буква a има буква b.

Решение:

Множеството на всички думи, чийто брой искаме да намерим, може да представим като обединение на непресичащи се множества: $X = \bigcup\limits_{i=0}^{5} X_i$, където X_i е множеството от търсените думи, които имат точно i букви a.

Ще намерим мощността на множеството X_i: за да осигурим изискването от условието на задачата всяка от буквите a ще обединим с една буква b и ще наречем тази двойка буква A. Сега думите от множеството X_i съдържат i букви A, а останалите $15 - 2i$ букви могат да бъдат b и c. За да намерим техния брой ще отговорим на два въпроса:

1. По колко начина можем да разположим i букви A в позициите на думата, които са $15 - i$ на брой. Това може да стане по $\binom{15-i}{i}$ начина;

2. По колко начина можем да запълним останалите позиции с букви b и c. Това става по 2^{15-2i} начина.

Като приложим принципа на умножението получаваме $|X_i| = \binom{15-i}{i}2^{15-2i}$

Сега прилагайки принципа на събирането можем да определим търсения брой:

$$|X| = \bigcup_{i=0}^{5} |X_i| = \sum_{i=0}^{5} \binom{15-i}{i} 2^{15-2i}$$

Задача 10: Дадени са множествата $|A| = n$ и $|B| = m$. Колко са възможните различни функции от A в B?

Задача 11: Дадени са множествата $|A| = n$ и $|B| = m$. Колко са възможните различни функции $f : A \to B$ такива, че f :

a) е инекция;

b) не е инекция;

c) е биекция.

Задача 12: Колко са думите с дължина 6 над азбуката $\{A, ..., Z\}$, в които:

a) няма ограничения за съставящите ги букви;

b) няма повтарящи се букви;

c) има буква A и са без повторения;

d) буквата A може да се среща само в първа или последна позиция и никоя от останалите букви не се повтаря.

Задача 13: Колко са булевите вектори с n нули и k единици, в които няма съседни единици?

<u>*Решение:*</u> Да приложим следния алгоритъм за съставяне на описаните вектори: разполагаме всички единици - k на брой. Между всеки две от тях поставяме по една нула, за да осигурим исканото условие. Така остават неизползвани още $n-(k-1)$ нули. Как да ги разположим, така че да получаваме различни вектори и то без повторения? За целта можем да слагаме нули на всяко място между единици, пред първа и след последна единица - тези места са $k+1$ на брой, като редът на слагане не е важен и повторения са разрешени.

И така търсеният брой е: $S_{k+1}^{n-k+1} = C_{n+1}^{n-k+1} = C_{n+1}^{k}$

Задача 14: Колко са числата в интервала $[10000, 99999]$, за които е изпълнено:

a) нечетни, без повтарящи се цифри;

b) нямат еднакви съседни цифри.

Задача 15: Колко са n-значните естествени числа, чиито цифри са в:

a) ненамаляващ ред;

b) растящ ред;

c) нерастящ ред;

d) намаляващ ред.

Задача 16: Дадени са множествата $A = \{p, q, r, s, t\}$ и $B = \{x, y, z, u, v, w\}$. Да се намери броят на релациите $R \subseteq A \cup B$, които са линейни наредби и изпълняват условието: $\forall (a, b) \in R(a \in B \rightarrow b \in B)$.

Задача 17: Колко са различните пермутации на n елемента, в които избрани m елемента се срещат като блок?

<u>*Решение:*</u> Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ е множество с n елемента. Търсим броя на всички пермутации на елементите на A, в които елементите $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}$ са в блок.

Да разгледаме елементите в блока като един нов елемент b , който да пермутираме с останалите елементи. Така елементите стават $n-m+1$, а техните пермутации са: $(n-m+1)!$.

До момента не сме обърнали внимание на подредбата на елементите вътре в блока - елемента b. Тези елементи са m на брой, така че техните пермутации са $m!$. Тъй като всяка пермутация на елементите в блока може да се съчетае независимо с всяка пермутация на елментите извън него, включително блока като цяло, то крайният брой на търсените пермутации е: $(n-m+1)!m!$.