ТЕМА 4: ФУНКЦИИ

Дефиниция на функция
Нека $R \subseteq A \times B$ е бинарна релация. Тя е:
- *Тотална функция* или само **функция** тогава и само тогава, когато:
$\forall a \in A\ \exists! b \in B\ ((a, b) \in R)$
- *Частична функция* тогава и само тогава, когато:
$\forall a \in A, \forall b_1 \forall b_2 \in B\ ((a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R \rightarrow b_1 = b_2)$

Видове функции:

- *Инекция* - $\forall a_1 \forall a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$
- *Сюрекция* - $\forall b \in B\ \exists a \in A\ (f(a) = b)$
- *Биекция* - когато е инекция + сюрекция

Композиция на функции: Нека $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$. Композиция на функциите f и g е функция $g \circ f : A \rightarrow C$, дефинирана така: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Обратна функция: Нека $f : A \rightarrow B$ е биекция. Обратна на f е функцията:
$f^{-1} : B \rightarrow A$ определена по следния начин $f^{-1}(y) = x\ (f(x) = y)$

Задачи за упражнение:

Задача 1: Определете множеството от всички функции, с домейн множество A и кодомейн множество B:

a) $A = \{1\}, B = \{2, 3\}$

Решение:
$f_1 = \{(1, 2)\}, \quad f_2 = \{(1, 3)\}$

b) $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$

Решение:
$f_1 = \{(1, 3), (2, 3)\}$

c) $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$

Решение:
$f_1 = \{(a, a), (b, a)\} \quad f_2 = \{(a, b), (b, b)\} \quad f_3 = \{(a, c), (b, c)\}$
$f_4 = \{(a, a), (b, b)\} \quad f_5 = \{(a, b), (b, a)\} \quad f_6 = \{(a, a), (b, c)\}$
$f_7 = \{(a, c), (b, a)\} \quad f_8 = \{(a, b), (b, c)\} \quad f_9 = \{(a, c), (b, b)\}$

d) $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$

Задача 2: Напишете в явен вид, като изберете подходящо представяне, всички функции f, които са:
a) инекции; b) сюрекции; c) биекции;
и имат следните домейн и кодомейн:
1. $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b\}$ 2. $f : \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$

Задача 3: . Нека P е множеството на всички хора, които някога са живели на Земята. За всяка от следните релации да се определи дали е функция и ако да – то каква: тотална, частична, инекция, сюрекция, биекция.

a) $\forall a \forall b \in P : (a, b) \in R \Leftrightarrow b$ е дядо на a - изберете един от следните отговори:
A) Тотална функция - инекция
B) Частична функция
C) Не е функция

b) $\forall a \forall b \in P : (a, b) \in R \Leftrightarrow b$ е майка на a - изберете един от следните отговори:
A) Частична функция
B) Тотална функция
C) Не е функция
D) Функция - инекция, но не сюрекция
E) Функция - биекция

c) $\forall a \forall b \in P : (a, b) \in R \Leftrightarrow b$ е първото дете на a - изберете един от следните отговори:
A) Функция - сюрекция, но не инекция
B) Частична функция
C) Не е функция
D) Биекция

d) $\forall a \in P, \forall b \in 2^P : (a, b) \in R \Leftrightarrow b$ е множеството от всички деца на a - изберете един от следните отговори:
A) Частична функция
B) Функция - инекция, но не сюрекция
C) Не е функция
D) Тотална функция
E) Функция - биекция

Задача 4: Напишете в явен вид като изберете подходящо представяне, всички функции $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, които са биекции.

Задача 5: Дадени са множествата: $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z\}, C = \{1, 2\}$. Намерете функции с указаните свойства, като изберете измежду горните множества домейн и кодомейн:

a) Инекция, но не сюрекция;

b) Сюрекция, но не инекция;

c) Биекция;

d) Нито инекция, нито сюрекция.

Задача 6: Проверете биекция ли е функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ако } x \text{ е четно} \\ x-1 & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

1. Ще докажем, че функцията е инекция.

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{N},\ x_1 \neq x_2$.

- x_1 и x_2 са с еднаква четност, б.о.о. да считаме, че са четни.
  Следователно $f(x_1) = x_1 + 1; f(x_2) = x_2 + 1$
  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- x_1 и x_2 са с различна четност $\Rightarrow$
  $f(x_1)$ и $f(x_2)$ също са с различна четност $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Следователно $f(x)$ е инекция.

2. Ще докажем, че функцията е сюрекция.

Нека $y \in \mathbb{N}$.

- y е четно, а $x = y + 1 \Rightarrow$
  $f(x) = f(y+1) = y$
- y е нечетно, а $x = y - 1 \Rightarrow$
  $f(x) = f(y-1) = y$

Следователно, $f(x)$ е сюрекция.

Функцията f(x) е инекция и сюрекция, следователно е биекция.

Задача 7: Покажете, че всяка от изброените функции от вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ има указаните свойства:

a) $f(x) = 2x$ инекция, но не сюрекция

<u>Решение:</u>

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{N},\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(x)$е инекция.
Елементът $3 \in \mathbb{N}$ няма първообраз, защото $\forall x \in \mathbb{N}(f(x) \neq 3)$.
Следователно, функцията $f(x)$ не е сюрекция.

b) $f(x) = x + 1$ инекция, но не сюрекция

c) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ сюрекция, но не инекция

<u>Решение:</u>

Функцията не е инекция, защото:
$2, 3 \in \mathbb{N}, 2 \neq 3 \wedge f(2) = f(3) = 1$.
Нека $x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(2x) = \lfloor (2x)/2 \rfloor = x$.
Следователно, функцията $f(x)$ е сюрекция.

Задача 8: За всяка от изброените по-долу функции определете вида й, като изберете един от указаните отговори:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(x) = x \ mod\ 10$
   A) Биекция
   B) Инекция
   C) Сюрекция
   D) Нито едно от горните

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : f(x) = |x + 1|$
   A) Биекция
   B) Сюрекция
   C) Частична функция

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$
   A) Биекция
   B) Инекция
   C) Сюрекция
   D) Частична функция

e) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$
   A) Биекция
   B) Инекция
   C) Сюрекция
   D) Частична функция

f) $f : A \to 2^A$: където A е произволно множество и $f(x) = \{x\}$

Задача 9: Нека $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ са съответно множествата на положителните и отрицателните реални числа. Покажете, че всяка от изброените по-долу функции е биекция:

a) $f : (0, 1) \to (a, b); f(x) = (b - a)x + a;\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$

b) $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 1); f(x) = 1/(x + 1)$

c) $f : (0, 1/2) \to \mathbb{R}^-; f(x) = 1/(2x - 1) + 1$

d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2x-1)+1 & 0 < x < 1/2 \\ 0 & x = 1/2 \\ 1/(2x-1)-1 & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Задача 10: Дадена е функцията $f : A \times B \to B; f(a, b) = b$, където $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y\}$. Докажете, че функцията е сюрекция, но не е инекция.

Задача 11: Функцията $f: J_8 \to J_8$ е дефинирана така: $f(x) = 5x \bmod 8$. Докажете, че f е биекция и намерете обратната функция f^{-1}.

Решение:

Представяме функцията $f(x)$ с таблица:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	5	2	7	4	1	6	3

Както се вижда от таблицата на функцията, тя е:

- инекция, защото всеки два различни елемента от домейна имат различни образи;

- сюрекция, защото всеки елемент на кодомейна има първообраз.

От това следва, че функцията е биекция.

От факта, че $f(x)$ е биекция, следва, че тя има обратна функция, която също е биекция. Следва таблица на обратната функция $f^{-1}(x)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f^{-1}(x)$	0	5	2	7	4	1	6	3

От сравняването на двете таблици е очевидно, че $f(x) = f^{-1}(x)$.

Задача 12: Дадени са функциите $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: f(x) = x + 1,\ g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: g(x) = x^2$. Определете функцията $g \circ f$.

Задача 13: Дадени са множествата $A = \{1, 2, 4, 6\}; B = \{3, 5, 7, 9\}; C = \{1, 2, 4, 6\}$ и функциите $f: A \to B = \{(1, 3), (2, 5), (4, 7), (6, 9)\}$ и $g: B \to C = \{(5, 6), (3, 2), (7, 1), (9, 4)\}$. Определете композициите $(f \circ g)$ и $(g \circ f)$ и проверете дали съвпадат.

Задача 14: Дадени са функциите $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+: f(x) = 3x+1,\ g: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+: g(x) = 2x + 1$. Да се определят функциите $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$.

Решение:

$f \circ f(x) = f(3x + 1) = 3(3x + 1) + 1 = 9x + 4$

$g \circ f(x) = g(3x + 1) = 2(3x + 1) + 1 = 6x + 3$

Задача 15: Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$ са функции. Да се докаже, че:

a) ако f и g са инекции, то $g \circ f$ е инекция;

b) ако f и g са сюрекции, то $g \circ f$ е сюрекция;

c) ако f и g са биекции, то $g \circ f$ е биекция.

Доказателство:

Нека $h: A \to C; h(x) = g \circ f(x)$. Ще докажем, че $h(x)$ е биекция, т.е. едновременно инекция и сюрекция.

Функцията $h(x)$ е инекция т.с.т.к. $\forall x_1 \forall x_2 \in A(x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2))$.

Нека $x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$. Тъй като $f(x)$ е *инекция*, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тъй като $g(x)$ е инекция, то $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$.

Следователно $h(x_1) \neq h(x_2)$ т.е. $h(x)$ е инекция.

Функцията $h(x)$ е *сюрекция* точно тогава, когато $\forall z \in C(\exists x \in A(h(x) = z))$

Нека $z \in C$. Функцията $g(x)$ е сюрекция $\Rightarrow \exists y \in B(g(y) = z)$.

От това, че $f(x)$ е сюрекция $\Rightarrow \exists x \in A(f(x) = y)$.

Тъй като $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z \Rightarrow \exists x \in A(h(x) = z)$. Следователно $h(x)$ е сюрекция. Следователно $h(x)$ е биекция.

Задача 16: Ако A и B са множества, то инекция между A и B съществува точно тогава, когато съществува сюрекция между B и A.

Задача 17: Нека E е множеството на четните естествени числа и е дадена функцията

$f : \mathbb{Z} \to E : f(x) = 2x + 6$.

Докажете, че функцията е обратима и намерете обратната функция.

Задача 18: Докажете, че функцията $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 1); f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ е биекция и намерете обратната функция f^{-1}.

<ins>Доказателство:</ins>

1. Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Следователно функцията е инекция.

2. Нека $y \in (0, 1)$. Търсим x такова, че е първообраз на y:

$$y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow xy + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{y}$$

Следователно функцията е сюрекция.

Функцията $f(x)$ е инекция и сюрекция, следователно е биекция.

Обратната функция е: $f : (0, 1) \to \mathbb{R}^+;\ f^{-1}(x) = \dfrac{1-y}{y}$

Задача 19: Дадена е функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Определете вида на функцията и намерете нейната обратна, ако има такава.

<ins>Решение:</ins>

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ са такива, че $f(x_1) = f(x_2)$.

Т.е. $\dfrac{x_1}{x_1^2+1} = \dfrac{x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow$

$x_1x_2^2 + x_1 - x_1^2x_2 - x_2 = 0 \Rightarrow$

$(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \Rightarrow$

$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

Например $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{1}{3};\quad f(\dfrac{1}{3}) = f(3) = \dfrac{3}{10}$.

Следователно, функцията не е инекция, т.е. тя няма обратна функция.

Задача 20:. Нека $f : A \to B$ е функция, а $X, Y \subseteq A$ и $S, T \subseteq B$ са множества. Да означим с $f(X)$ образа на множеството X, а с $f^R(S)$ първообраза на множеството S относно функцията f. Да се докаже, че:

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

Решение:

1. Нека $z \in B, z \in f(X \cup Y) \Rightarrow$
   $\exists a \in X \cup Y(f(a) = z) \Rightarrow$
   $(a \in X \wedge f(a) = z) \vee (a \in Y \wedge f(a) = z) \Rightarrow$
   $z \in f(X) \vee z \in f(Y) \Rightarrow$
   $z \in f(X) \cup f(Y)$
2. Нека $z \in B, z \in f(X) \cup f(Y) \Rightarrow$
   $z \in f(X) \vee z \in f(Y) \Rightarrow$
   $\exists a \in X(f(a) = z) \vee \exists b \in Y(f(b) = z) \Rightarrow$
   $\exists c \in X \cup Y(f(c) = z) \Rightarrow$
   $z \in f(X \cup Y)$

От 1. и 2. следва $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

c) $f^R(S \cup T) = f^R S \cup f^R T$

d) $f^R(S \cap T) = f^R S \cap f^R T$

Решение:

1. Нека $a \in A, a \in f^R(S \cap T) \Rightarrow$
   $\exists z \in S \cap T(f(a) = z) \Rightarrow$
   $z \in S \wedge z \in T \wedge f(a) = z \Rightarrow$
   $a \in f^R(S) \wedge a \in f^R(T) \Rightarrow$
   $a \in f^R(S) \cap f^R(T)$
2. Нека $a \in A, a \in f^R(S) \cap f^R(T) \Rightarrow$
   $a \in f^R(S) \wedge a \in f^R(T) \Rightarrow$
   $\exists s \in S(f(a) = s) \wedge \exists t \in T(f(a) = t) \Rightarrow$ *тъй като f е функция*
   $\exists z \in S \cap T(f(a) = z) \Rightarrow$ $z = s = t$
   $a \in f^R(S \cap T)$

   От 1. и 2. следва $f^R(S \cap T) = f^R(S) \cap f^R(T)$

   e) $X \subseteq f^R(f(X))$

   f) $f(f^R(S)) \subseteq S$

Мощност на множество

Равномощни множества: $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists$ биекция $f : A \to B$

Крайни множества:

1. $A = \emptyset \Rightarrow |A| = 0$
2. $\exists$ биекция $f : A \to I_n \Rightarrow |A| = n$

Изброими множества: $\exists$ биекция $f : A \to \mathbb{N} \Rightarrow |A| = \aleph_0$

Задачи за упражнение:

Задача 1: Намерете мощността на всяко от указаните множества, като намерите биекция между това множество и множеството I_n или J_n за някое n.

a) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq 2x + 5 \leq 100\}$

Упътване: $A = J_{48}$

b) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x^2 \leq 500\}$

Упътване: $A = J_{23}$

c) $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots, 44, 47\}$

Упътване: $f : J_{16} \to A;\ f(x) = 3x + 2$

Задача 2: Покажете, че всяко от следващите множества е изброимо, като установите биекция между него и множеството на естествените числа:

a) Множеството на четните естествени числа;
b) Множеството на целите числа;
c) Множеството на нечетните цели числа;
d) Множеството на четните цели числа;
e) Множеството на всички думи над азбуката $\{a\}$.

Задача 3: Докажете, че множествата от всяка от изброените двойки са равномощни като намерите биекция между тях:

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Упътване: Докажете, че $f : \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{N};\quad f(z) = -z - 1$ е биекция

b) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$

Упътване: Докажете, че следната функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е биекция:

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{ако } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{ако } z < 0 \end{cases}$$

c) $\mathbb{N}$ и $S = \{a \in \mathbb{Z} : 5 | a\}$

Упътване: Докажете, че следната функция $f : S \to \mathbb{N}$ е биекция:

$$f(s) = \begin{cases} 2\frac{s}{5} & \text{ако } s \geq 0 \\ -2\frac{s}{5} - 1 & \text{ако } s < 0 \end{cases}$$

Задача 4: Да се докаже, че $|(0,1)| = |\mathbb{R}^+|$.

Упътване: Докажете, че $f : (0,1) \to \mathbb{R}^+, f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ е биекция.

Задача 5: Докажете, че $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Упътване I:
Да означим: $L_k = \{(0,k), (1,k-1), ..., (k,0)\}$;
Докажете, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_k \Rightarrow |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_k| = \aleph_0$

Упътване II:
Докажете, че $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$ е биекция.

Задача 6: Да се докаже, че ако $|A| = n$, то $|J_2^n| = |2^A|$.

Решение:

Ще дефинираме биекция $f : J_2^n \to 2^A$ по следния начин:
Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in J_2^n$. Тогава
$f(\widetilde{\alpha}) = \{x | x \in A, \exists \alpha_i (\alpha_i = 1 \wedge x = a_i)\}$

1. Ще докажем, че функцията е инекция.
Нека $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in J_2^n, \widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta} \Rightarrow \exists i (\alpha_i \neq \beta_i)$
Нека б.о.о. да приемем, че $\alpha_i = 1, \beta_i = 0 \Rightarrow$
$\exists a_i \in A (a_i \in f(\widetilde{\alpha}) \wedge a_i \notin f(\widetilde{\beta})) \Rightarrow f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$
Следователно, функцията е инекция.

2. Ще докажем, че функцията е сюрекция.
Нека $X \subseteq A$. Определяме $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ по следния начин:
$\forall i \in I_n (\alpha_i = 1 \Leftrightarrow a_i \in X) \Rightarrow f(\widetilde{\alpha}) = X$
Следователно, функцията е сюрекция.

От 1. и 2. следва, че функцията е биекция.

Следователно $|J_2^n| = |2^A| = 2^n$.