Топки в кутии

n кутии

m топки		различими		неразличими	
различими	без ограничения		n^m	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} \left\{ {m \atop k} \right\}$
	≤ 1 топка в кутия (инекции)		$n^{\underline{m}}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)		$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\left\{ {m \atop n} \right\}$
неразличими	без ограничения		$\binom{m+n-1}{m}$	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$
	≤ 1 топка в кутия (инекции)		$\binom{n}{m}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)		$\binom{m-1}{m-n}$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$p(m,n)$

Обяснение на нотациите:

- $n^{\underline{m}}$ е кратък запис за произведението $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$. С други думи,

  $$n^{\underline{m}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)$$

  Очевидно е, че $n^{\underline{m}} = 0$ при $m > n$. Освен това, има смисъл да се дефинира $n^{\underline{0}} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, тъй като единицата е неутрален елемент на операцията умножение. $n^{\underline{m}}$ се чете n *на падаща степен* m (n *to the* m *falling* на английски).

- $\left\{ {m \atop n} \right\}$—чете се "$m$-подмножество-$n$"—е *число на Стирлинг от втори род.* $\left\{ {m \atop n} \right\}$ е броят на начините за разбиване на m-елементно множество на n подмножества. В сила е рекурентното уравнение

  $$\left\{ {m \atop n} \right\} = n \left\{ {m-1 \atop n} \right\} + \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\} \text{ за } m > 0 \text{ и } m \geq n.$$

  с гранични условия $\left\{ {k \atop k} \right\} = 1$ за $k \geq 0$ и $\left\{ {k \atop 0} \right\} = 0$ за $k > 0$. Лесно се вижда, че числата на Стирлинг от втори род са свързани с броя на сюрекциите от m елементен домейн в n елементен кодомейн така:

  $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = n! \left\{ {m \atop n} \right\}.$$

- $p(m,n)$ е броят на целочислените разбивания на числото m на n части (на английски, *number of integer partitions*). *Целочислено разбиване на* m *на* n *части* е всяка сума от n положителни естествени числа (където $1 \leq n \leq m$), равна на m, където редът на сумиране няма значение. Тогава $\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$ е броят на целочислените разбивания на числото m. Примерно, числото 4 има пет целочислени разбивания:

$$
\begin{aligned}
4 &= 1+1+1+1 \\
4 &= 1+1+2 \\
4 &= 2+2 \\
4 &= 1+3 \\
4 &= 4
\end{aligned}
$$

Очевидно, $p(4,2) = 2$.

В сила е рекурентното уравнение

$$p(n,k) = p(n-k,k) + p(n-1,k-1)$$

с гранични условия $p(k,k) = 1$ за $k \geq 0$ и $p(k,0) = 0$ за $k \geq 1$ и $p(t,k) = 0$ за $t < k$.

- $[\![q]\!]$, където q някакъв израз с булева интерпретация, се дефинира така:

$$[\![q]\!] = \begin{cases} 1, & \text{ако } q \text{ е истина} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Примерно, $[\![m \leq n]\!]$ е равно на 1, когато $m \leq n$, а във всички останали случаи е 0. Тази нотация се нарича *нотация на Iverson*.