## 2.5 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

В настоящия параграф ще коментираме още един начин за построяване на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон с разделени разлики.

**Дефиниция 1.** *Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ са дадени различни точки.* ***Разделената разлика*** *на функцията $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и се дефинира индуктивно по следния начин:*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*като приемаме, че $f[x_i] := f(x_i)$ за всяка точка $x_i$.*

**Твърдение 1** (Интерполационна формула на Нютон). *Интерполационният полином на Лагранж може да се представи чрез формулата*

$$L_n(f; x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

*Идея на доказателството.* Формулата на Нютон се основава на връзката между полинома $L_n(f, x)$, интерполиращ $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$, и полинома $L_{n-1}(f, x)$, интерполиращ $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Да разгледаме разликата $L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) \in \pi_n$. Ясно е, че стойността на тази разлика е 0 за $x = x_0, \ldots, x_{n-1}$, тъй като в тези точки и двата полинома съвпадат с $f(x)$. Тогава

$$L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) = C(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}),$$

т.е.

$$L_n(f, x) = C(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) + L_{n-1}(f, x).$$

Може да се покаже, че $C = f[x_0, \ldots, x_n]$. Разсъждавайки индуктивно, можем да изразим $L_{n-1}$ чрез $L_{n-2}$ и т.н., с което получаваме формулата на Нютон. □

**Задача 1.** Като използвате интерполационната формула на Нютон, намерете полинома $P(x)$, който интерполира функцията $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 - x + 2$ в точките 0,1,4.

*Решение.* Нека първо систематизираме интерполационните условия в таблица. За целта трябва да пресметнем стойността на $f(x)$ в точките 0, 1, 4. Получаваме

| $x$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 48 |

Използвайки интерполационната формула на Нютон, получаваме представянето

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Тогава трябва да пресметнем разделените разлики, участващи във формулата. Удобно е тези пресмятания да се систематизират в следната таблица:

| Възли | Ред 0 | Ред 1 | Ред 2 |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $f[x_0] = 2$ | $f[x_0, x_1] = 3$ | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$ |
| $x_1 = 1$ | $f[x_1] = 5$ | $f[x_1, x_2] = \frac{43}{3}$ | |
| $x_2 = 4$ | $f[x_2] = 48$ | | |

Коефициентите, необходими ни за формулата на Нютон, се намират в първия ред на така получената таблица. Получаваме

$$L_2(f;x) = 2 + 3(x-0) + \frac{17}{6}(x-0)(x-1) = 2 + 3x + \frac{17}{6}x^2 - \frac{17}{6}x = 2 + \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}x^2.$$

□

**Задача 2.** Точките

| $x$ | -2 | 1 | 4 | -1 | 3 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | 2 | 59 | 4 | 24 | -53 |

лежат на полином. Определете степента на този полином.

*Решение.* От единствеността на интерполационния полином и прилагайки формулата на Нютон, получаваме $P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{5} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$ Както в предишната задача правим таблица с необходимите ни разделени разлики (обърнете внимание, че не е необходимо възлите да бъдат в нарастващ ред):

| Възли | Ред 0 | Ред 1 | Ред 2 | Ред 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0 = -2$ | $f[x_0] = -1$ | $f[x_0, x_1] = 1$ | $f[x_0, x_1, x_2] = 3$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$ | 0 | 0 |
| $x_1 = 1$ | $f[x_1] = 2$ | $f[x_1, x_2] = 19$ | $f[x_1, x_2, x_3] = 4$ | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$ | 0 | |
| $x_2 = 4$ | $f[x_2] = 59$ | $f[x_2, x_3] = 11$ | $f[x_2, x_3, x_4] = 6$ | $f[x_2, x_3, x_4, x_5] = 1$ | | |
| $x_3 = -1$ | $f[x_3] = 4$ | $f[x_3, x_4] = 5$ | $f[x_3, x_4, x_5] = -2$ | | | |
| $x_4 = 3$ | $f[x_4] = 24$ | $f[x_4, x_5] = 11$ | | | | |
| $x_5 = -4$ | $f[x_5] = -53$ | | | | | |

Коефициентите във формулата на Нютон лежат на първия ред и тогава последният ненулев член е $f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Следователно полиномът е от трета степен. □

Нека сега коментираме накратко въпроса **защо са необходими различни формули за решаване на една и съща задача**.

Имплементирайки даден алгоритъм, основен е въпросът за неговото бързодействие. Именно тук се появява разликата между различните формули. В зависимост от това каква конкретна практическа задача искаме да решим, ще искаме различни неща от съответния алгоритъм.

- Често на практика, когато искаме да апроксимираме стойността на дадена функция в точката $x$, като са известни стойностите в точките $x_0, x_1, \ldots$, се построява редица от полиноми – първо, полином $p_1(x)$ от първа степен през двете най-близки точки, след това – полином $p_2(x)$ от втора степен през вече използваните две точки и следващата по отдалеченост и т.н. Това се прави, докато две съседни приближения дадат един и същ (с точност до някаква допустима грешка) резултат. След като сме получили един и същи резултат по два различни начина, можем да считаме, че този резултат е достоверен. За построяването на такава редица от полиноми е явно преимуществото на формулата на Нютон, тъй като, за да добавим нов възел, е достатъчно да добавим един ред в таблицата с разделени разлики и един член в сумата, описваща полинома. С други думи, можем да използваме вече направените изчисления. По формулата на Лагранж би ни се наложило да направим всички изчисления отначало, тъй като базисните полиноми зависят от възлите.

- Понякога искаме да построим полиноми с различни стойности, но еднакви възли. Например в биологията, когато се правят експерименти за развитието на една популация от микроорганизми, се следва експериментален протокол. Измервания се правят във фиксирани моменти от време. Тогава, ако искаме да сравним развитието на две популации, ще трябва да построим полиноми с едни и същи възли (фиксираните моменти от време), но различни стойности (численостите на различните популации в дадените моменти от време). Когато искаме да построим различни интерполационни полиноми, които имат обаче еднакви възли, по-удачно ще бъде да използваме формулата на Лагранж. След като възлите не се променят, базисните полиноми остават същите и трябва само да сметнем линейната им комбинация с новите стойности. Формулата на Нютон в този случай не е удобно да се използва, тъй като, сменяйки стойностите, трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало (да отбележим още веднъж, че базата на рекурсията зависи от стойностите на приближаваната функция).

- В случаите, когато възлите са на равни разстояния един от друг, могат да се използват формулите на Нютон с крайни разлики. По формулата на Лагранж полиномът се представя във вида

  $$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k\neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

  Имаме $n + 1$ събираеми, като за всяко трябва да се извършат от порядъка на $n$ операции, т.е. сложността е $O(n^2)$. Формулата на Нютон за интерполиране напред (вж. учебника) представя полинома във вида

  $$\sum_{i=0}^{n} \binom{t}{i} \Delta^i f_0,$$

  т.е. се извършват $O(n)$ операции. Тази формула обаче не е приложима в общия случай, а само при равноотдалечени възли

С други думи, различните формули ни предоставят различни инструменти, които ни позволяват да изберем подходящото средство за всеки конкретен случай.