ТЕМА 8: РЕКУРЕНТНИ УРАВНЕНИЯ

Рекурентни зависимости и рекурсивни дефиниции.
Съставяне на рекурентни уравнения

Задача 1: Да се намери рекурентна зависимост за броя на начините, по които n различни предмета могат да се подредят в редица.

Решение:

$p_n = np_{n-1},\ n > 1$
$p_1 = 1$

Задача 2: Нека е дадена стълба с n стъпала и можем да я изкачим като стъпваме през едно или през две стъпала. Да се намери рекурентна зависимост за броя на начините, по които можем да изкачим стълбата.

Решение:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2$
$a_1 = 1, a_2 = 2$

Задача 3: Да се намери рекурентна зависимост за броя на преместванията на дискове в задачата за Ханойските кули.

Решение:

$T_1 = 1$
$T_n = 2T_{n-1} + 1,\ n > 1$

Задача 4: Да се намери рекурентна зависимост за броя на булевите вектори с дължина n, които нямат съседни нули.

Решение:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2$
$a_1 = 2, a_2 = 3$

Задача 5: Да се намери рекурентна зависимост за броя на булевите вектори с дължина n, които имат съседни нули.

Решение:

Да означим с $\widetilde{\alpha}^n$ булев вектор с дължина n, който има съседни нули, а с a_n - броя на тези вектори.

В сила е следната рекурентна зависимост:

$\widetilde{\alpha}^n = 1\widetilde{\alpha}^{n-1} \vee 01\widetilde{\alpha}^{n-2} \vee 00\widetilde{b}^{n-2}$, където b^{n-2} е произволин булев вектор с дължина $n-2$.

Така стигаме до следното рекурентно уравнение със съответните начални стойности:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2},\ n > 2$
$a_1 = 0, a_2 = 1$

Задача 6: Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична позиционна бройна система без водещи нули има n цифри, от които нулите са четен брой.

<u>*Решение:*</u>

Да означим с $\widetilde{\alpha}^n$ записа на число в десетична позиционна бройна система без водещи нули, с n цифри, от които нулите са четен брой, а с a_n - броя на тези числа.

В сила са следните рекурентни зависимости:

$\widetilde{\alpha}^n = \widetilde{\alpha}^{n-1}.x$, $\;x$ - цифра, различна от 0 ИЛИ

$\widetilde{\alpha}^n = \overline{\widetilde{\alpha}}^{n-1}.0$ - където $\overline{\widetilde{\alpha}}^{n-1}$ е число, в което нулите са нечетен брой

което обобщено изглежда така:

$\widetilde{\alpha}^n = \widetilde{\alpha}^{n-1}.x \vee \overline{\widetilde{\alpha}}^{n-1}.0$

От това следва следното уравнение:

$a_n = 9a_{n-1} + \overline{a_{n-1}}$

Като вземем пред вид, че:

$\overline{a_{n-1}} = 9.10^{n-2} - a_{n-1} \quad \Rightarrow$

$a_n = 9a_{n-1} + 9.10^{n-2} - a_{n-1}$

Така стигаме до следното рекурентно уравнение и начална стойност:

$a_n = 8a_{n-1} + 9.10^{n-2},\; n > 1$

$a_1 = 9$

Задача 7: Да се намери рекурентна зависимост за броя на естествените числа, чийто запис в десетична позиционна бройна система без водещи нули има n цифри и не съдържа съседни нули.

<u>*Решение:*</u>

Да означим с $\widetilde{\alpha}^n$ записа на число в десетична позиционна бройна система с n цифри и с исканите свойства, а с a_n - броя на тези числа.

В сила е следната рекурентна зависимост:

$\widetilde{\alpha}^n = \widetilde{\alpha}^{n-1}.x \vee \widetilde{\alpha}^{n-2}.x.0$, $\;x$ - цифра, различна от 0

Така стигаме до следното рекурентно уравнение със съответните начални стойности:

$a_n = 9a_{n-1} + 9a_{n-2},\; n > 2$

$a_1 = 9, a_2 = 90$

Рекурентна редица: Числова редица $s_0, s_1, ..., s_n, ...$ такава, че за някакво $k > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ членовете ѝ се представят със следното ***рекурентно уравнение***:

$$s_{n+k} = f(n, s_{n+k-1}, s_{n+k-2}, ..., s_n)$$

Линейни рекурентни уравнения с постоянни коефициенти

Общ вид на линейно рекурентно уравнение от ред k с постоянни коефииценти:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = f(n)$$

където $c_i, i = 0, 1, 2, ..., k$ са константи.

Редът на линейното рекурентно уравнение е k тогава, когато $c_0 \neq 0, c_k \neq 0$

Хомогенно е линейното рекурентно уравнение тогава, когато $f(n) = 0$. В противен случай уравнението е нехомогенно.

Решение на дадено рекурентно уравнение е затворена формула за общия член на рекурентна редица, която се представя от рекурентното уравнение.

Общо решение на рекурентно уравнение от ред k се нарича такова решение, което зависи от k константи $C_1, C_2, ..., C_k$, при подходящия избор на които може да се получи всяко решение.

Итеративни методи за решаване на линейни рекурентни уравнения

С последователно прилагане на рекурентната зависимост се достига до решение. Ще разгледаме следния пример:

$s_n = s_{n-1} + 2, n > 1$

$s_1 = 3$

1. Като се започне от s_n и се движим назад към s_1 (рекурсия):

$$
\begin{aligned}
s_n &= s_{n-1} + 2 = \\
&= (s_{n-2} + 2) + 2 = s_{n-2} + 2.2 = \\
&= (s_{n-3} + 2) + 2.2 = s_{n-3} + 3.2 = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= (s_{n-(n-1)} + 2) + 2 = \\
&= s_1 + 2.(n-1) = \\
&= 3 + 2.(n-1)
\end{aligned}
$$

2. Като се започне от s_1 и се движим напред към s_n (итерация):

$$
\begin{aligned}
&s_2 = s_1 + 2 \\
&s_3 = s_2 + 2 = (s_1 + 2) + 2 = s_1 + 2.2 \\
&s_4 = s_3 + 2 = (s_1 + 2.2) + 2 = s_1 + 3.2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&s_n = (s_{n-1} + 2) = (s_1 + (n-2).2) + 2 = s_1 + (n-1).2 = \\
&\quad = 3 + 2.(n-1)
\end{aligned}
$$

Решаване на линейни хомогенни рекурентни уравнения

Нека е дадено линейното хомогенно рекурентно уравнение:

$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + ... + c_k s_{n-k} = 0$

Разглеждаме характеристичното му уравнение, което има вида:

$c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$

Ако r е решение на това уравнение, то $A.r^n$, където A е константа, е решение на рекурентното уравнение.

Тъй като характеристичното уравнение е от степен k, то има k корена. Различаваме два основни случая:

Случай 1: Всичките k корена на характеристичното уравнение са различни. Тогава общото решение на рекурентното уравнение има вида:

$s_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + A_3 r_3^n + ... + A_k r_k^n$

където $r_1, r_2, ..., r_k$ са корените на характеристичното уравнение, а константите $A_1, A_2, ..., A_k$ следва да бъдат определени от началните условия.

Пример: Да се реши линейното хомогенно рекурентно уравнение от втори ред:

$$s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 0, n \geq 2$$
$$s_0 = 0, \quad s_1 = 3$$

Решение: Характеристичното уравнение има вида:

$$r^2 - 7r + 10 = 0$$

и има два различни реални корена: $r_1 = 2$ и $r_2 = 5$.

Така общото решение на рекурентното уравнение е:

$$s_n = A_1(2)^n + A_2(5)^n$$

Като се вземат пред вид началните условия се получават следните уравнения:

$$A_1 + A_2 = 0$$
$$2A_1 + 5A_2 = 3$$

откъдето получаваме: $A_1 = -1$, $A_2 = 1$.

Следователно решението на рекурентното уравнение с дадените начални условия е:

$$s_n = -2^n + 5^n$$

Случай 2: Характеристичното уравнение има кратни корени. Тогава общото решение на рекурентното уравнение има вида:

$$s_n = \sum_{i=1}^{p}(A_{i1} + A_{i2}n + ... + A_{it_i}n^{t_i-1})r_i^n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)r_i^n$$

като $r_1, r_2, ..., r_p$ са различните корени на характеристичното уравнение, чиито кратности са съответно $t_1, t_2, ..., t_p$, а $A_{ij}, i = 1, 2, ..., p, j = 1, 2, ..., t_i$ са константи, които ще бъдат определени от началните условия.

Пример: Да се реши линейното хомогенно рекурентно уравнение от втори ред:

$$s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = 0, n \geq 2$$
$$s_0 = 1, \quad s_1 = 6$$

Решение: Характеристичното уравнение има вида:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

и има два равни реални корена: $r_1 = r_2 = 2$.

Така общото решение на рекурентното уравнение е:

$$s_n = (A_1 + A_2n)2^n$$

При прилагане на началните условия се получава системата уравнения:

$$A_1 = 1$$
$$2A_1 + 2A_2 = 6$$

чието решение е: $A_1 = 1, A_2 = 2$

Следователно решението на рекурентното уравнение с дадените начални условия е:

$$s_n = (1 + 2n)2^n, n \in \mathbb{N}$$

Решаване на линейни нехомогенни рекурентни уравнения

Нека е дадено линейното нехомогенно рекурентно уравнение:

$$c_0s_n + c_1s_{n-1} + c_2s_n + ... + c_ks_{n-k} = f(n)$$

като общият вид на нехомогенната част е:

$$f(n) = Q_1(n)b_1^n + Q_2(n)b_2^n + ... + Q_m(n)b_m^n, \quad i \neq j \to b_i \neq b_j$$

където $Q_i(n)$ е полином на n от степен v_i.

Общото решение на линейното нехомогенно рекурентно уравнение има вида:

$$s_n = s_n^h + s_n^p$$

където s_n^h е общото решение на съответното линейно хомогенно рекурентно уравнение, а s_n^p е частно решение на нехомогенното.

Тогава общото решение на нехомогенното линейно рекурентно уравнение ще изглежда така:

$$s_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)r_i^n + \sum_{i=1}^{m} R_i(n)b_i^n$$

Ако b_i не е корен на характеристичното уравнение, то R_i е полином от вида:

$$R_i(n) = B_{i0} + B_{i1}n + ... + B_{iv_i}n^{v_i}$$

Ако b_i е корен на характеристичното уравнение с кратност k, то полиномът R_i има вида:

$$R_i(n) = n^k(B_{i0} + B_{i1}n + ... + B_{iv_i}n^{v_i})$$

На константите b_i от нехомогенната част може да се гледа като на корени на характеристичното уравнение с кратност $v_i + 1$, определена от степента на съответния полином Q_i, която е v_i. Следва да се определят коефициентите на полиномите $P_i(n)$ и $R_i(n)$. За целта трябва да се използват дадените начални стойности и допълнително да се изчислят още толкова члена на рекурентната редица, колкото е необходимо.

Пример: Да се реши линейното нехомогенно рекурентно уравнение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 3^n, n \geq 1$$
$$s_0 = 4$$

Решение:

1. Намираме общото решение на съответното хомогенно рекурентно уравнение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 0$$

Неговото характеристично уравнение $r - 2 = 0$ има корен $r = 2$.
Следователно, общото му решение е:

$$s_n^h = A2^n$$

2. Търсим частно решение на нехомогенното линейно рекурентно уравнение от вида $Q.3^n$, където Q е полином от степен 0, т.е. константа.

3. Така общото решение на нехомогенното линейно рекурентно уравнение е:

$$s_n = s_n^h + s_n^p = A.2^n + B.3^n$$

4. Сега можем да намерим стойности на константите A и B, които удовлетворяват началното условие. За целта изчисляваме още един член на редицата:

$s_1 = 2s_0 + 3 = 11$

и съставяме системата уравнения:

$A + B = 4$
$2A + 3B = 11$

Откъдето намираме следните стойности на константите: $A = 1$ и $B = 3$.

5. Решението на линейното нехомогенно рекурентно уравнение, което удовлетворява началното условие е:

$s_n = 2^n + 3^{n+1}$

Задачи за упражнение:

Задача 1: Съставете и решете рекурентно уравнение, което по зададена начална сума на банков влог и стойност на годишната лихва определя каква е наличната сума на n-тата година от създаване на влога.

Задача 2: Намерете решение на линейното хомогенно рекурентно уравнение от първи ред с дадените начални условия:

a) $s_n - s_{n-1} = 0, n > 0; \quad s_0 = 12$
b) $s_n - 2s_{n-1} = 0, n > 0; \quad s_0 = 1$
c) $s_n - 3s_{n-1} = 0, n > 1; \quad s_1 = 17$

Задача 3: Намерете общото решение на всяко от следните линейни хомогенни рекурентни уравнения от втори ред:

a) $s_n - 4s_{n-1} + 3s_{n-2} = 0$
b) $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0$
c) $s_n + 2s_{n-1} + s_{n-2} = 0$
d) $s_n + 3s_{n-2} = 0$

Задача 4: Намерете решение на линейното хомогенно рекурентно уравнение с дадените начални условия:

a) $s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 3$
b) $s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 1, s_1 = 6$
c) $s_n + 6s_{n-1} + 9s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$
d) $s_n - 4s_{n-1} + 3s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 10, s_1 = 16$
e) $s_n - s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 2$

Задача 5: Намерете решение на линейното нехомогенно рекурентно уравнение от първи ред с дадените начални условия:

a) $s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$
b) $s_n - s_{n-1} = 5, n > 0; s_0 = 2$
c) $s_n - 2s_{n-1} = 5.2^n, n > 0; s_0 = 7$

Задача 6: Намерете общото решение на линейното нехомогенно рекурентно уравнение:

$s_n - s_{n-1} = f(n)$

където $f(n)$ има вида:

a) 2^n b) $n.2^n$ c)3^n d) 5.3^n

Задача 7: Намерете общото решение на следното линейно нехомогенно рекурентно уравнение от втори ред:

a) $s_n + s_{n-1} - 6s_{n-2} = 2^n - 1$

b) $s_n + 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 24t^2, t = const$

c) $s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = (n^2 + 1).2^n$

Задача 8: Намерете решение на линейното нехомогенно рекурентно уравнение от втори ред с дадените начални условия:

a) $s_n - 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 4, n \geq 2; s_0 = 1, s_1 = 3$

b) $s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2} = 3, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$

c) $s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 3^n, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$

Задача 9: Намерете общото решение на всяко от следните линейни нехомогенни рекурентни уравнения:

a) $s_n - 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 3 + 3^n + n3^n + 3n^2 3^n, n \geq 2$

b) $s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2} = 3 + n - n^2 7^n, n \geq 2$

c) $s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 3^n + (2n - n^3)5^n, n \geq 2$

d) $s_{n+3} - 7s_{n+2} + 16s_{n+1} - 12s_n = n4^n$

Задача 10: Намерете формула за следната сума:

$s_n = \sum_{i=0}^{n} i^2,\ n \in \mathbb{N}$

<u>*Решение:*</u> За целта ще съставим и решим рекурентно уравнение.

$s_n = s_{n-1} + n^2,\ n \in \mathbb{N}$ (1)

$s_0 = 0$

Характеристичният полином на (1) има вида

$P(r) = r - 1$ с единствен корен $r_1 = 1$

Функцията на n може да се представи по следния начин:

$f(n) = n^2 = n^2.1^n$

поради което се добавя трикратен корен 1. Така мултимножеството от корени на (1) става $\{(4)1\}$.

Сега можем да съставим общото решение на рекурентното уравнение:

$s_n = Ar_1^n + n(B_1 + B_2 n + B_3 n^2)r_2^n =$

$C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + C_3 n^3$

Тъй като в общото решение има 4 константи, за да ги намерим ще са ни нужни същият брой начални стойности, освен намерената в началото $s_0 = 0$, а те са:

$s_1 = 1,\ s_2 = 5,\ s_3 = 14$

Следва да съставим системата уравнения за намиране на константите:

$C_0 = 0$
$C_1 + C_1 + C_2 + C_3 = 1$
$C_2 + 2C_1 + 4C_2 + 8C_3 = 5$
$C_3 + 3C_1 + 9C_2 + 27C_3 = 14$

която има следното решение:

$C_0 = 0;\ C_1 = \dfrac{1}{6};\ C_2 = \dfrac{1}{2},\ C_3 = \dfrac{1}{3}$

Така конкретното решение на рекурентното уравнение ни дава търсената формула:

$$s_n = \frac{n(1 + 3n + 2n^2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Задача 11: Намерете формула за следната сума като съставите и решите рекурентно уранение:

$s_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ \dots\ + n(n+1),\ n \in \mathbb{N}^+$

Решение: За целта ще съставим следното рекурентно уравнение:

$s_n = s_{n-1} + n(n+1),\ n \in \mathbb{N}^+$ (2) с начално условие

$s_1 = 2$

Характеристичният полином на (2) има вида

$P(r) = r - 1$ с единствен корен $r_1 = 1$

Функцията на n може да се представи по следния начин:

$f(n) = n^2 + n = (n^2 + n).1^n$

поради което се добавя трикратен корен 1. Така мултимножеството от корени на (2) става $\{(4)1\}$.

Сега можем да съставим общото решение на рекурентното уравнение:

$s_n = (An^3 + Bn^2 + Cn + D)1^n$

Тъй като в общото решение има 4 константи, за да ги намерим ще са ни нужни същият брой начални стойности, освен намерената в началото $s_1 = 2$, а те са:

$s_2 = 8,\ s_3 = 20,\ s_4 = 40$

Следва да съставим системата уравнения за намиране на константите:

$A + B + C + D = 2$
$8A + 4B + 2C + D = 8$
$27A + 9B + 3C + D = 20$
$64A + 16B + 4C + D = 40$

която има следното решение:

$A = \dfrac{1}{3};\ B = 1;\ C = \dfrac{2}{3},\ D = 0$

Така конкретното решение на рекурентното уравнение ни дава търсената формула:

$$s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Задача 12: Намерете рекурентно уравнение, чието общо решение е:

$s_n = A + Bn + C3^n$

Задача 13: Да означим с S думите над азбуката $\{0, 1, 2\}$, в които след всяка нула има единица. Съставете рекурентно уравнение със съответните начални стойности за намиране на този брой и го решете.

Задача 14: Да означим с t_n броя на двоичните дървета с височина n. Съставете рекурентно уравнение за t_n и определете начални стойности.