2.19 Интерпретации

Нека $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ са езици от първи ред. Интерпретация I на $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}'$ се състои от

(i) Едноместен предикате символ U_I на $\mathcal{L}'$;

(ii) n-местен функционален символ $\mathbf{f}_I$ на $\mathcal{L}'$, за всеки n-местен предикатен символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$;

(iii) n-местен предикатен символ $\mathbf{p}_I$ на $\mathcal{L}'$, за всеки n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{L}$, различен от $=$.

Инетрпретация на $\mathcal{L}$ в формалната система $\mathcal{F}$ е интерпретация I на $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, такава че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x U_I x$$
$$\vdash_{\mathcal{F}} U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to U_I \mathbf{f}_I x_1 \ldots x_n.$$

за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$.

Нека I е интерпретация на $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}'$. Дефинираме интерпретация $\mathbf{A}^{(I)}$ на формулата $\mathbf{A}$ на $\mathcal{L}$ по следния начин: Нека $\mathbf{A}_I$ се получава от $\mathbf{A}$, замествайки всеки нелогически символ α, участващ в $\mathbf{A}$ с α_I, след което замествайки всяка подформула от вида $\exists \mathbf{x}\mathbf{B}$ с формулата $\exists \mathbf{x}(U_I \mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{B})$. Тогава

$$\mathbf{A}^{(I)} \equiv U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_n \to \mathbf{A}_I,$$

където $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са свободните променливи на $\mathbf{A}$.

Интерпретация на $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$ наричаме интерпретация I на $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ в $\mathcal{F}'$, за която

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$$

за всяка нелогическа аксиома на $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$.

Теорема 2.43. Нека I е интерпретация на $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$. Тогава, ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$.

Доказателство. Нека първо да отбележим, че ако терма $\mathbf{a}$ е със променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, то

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_n \to U_I \mathbf{a}_I.$$

Действително, твърдението е тривиално, ако $\mathbf{a} = \mathbf{x}_i$. В противен случай, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$ и значи $\mathbf{a}_I \equiv \mathbf{f}_I \mathbf{a}_{1I} \ldots \mathbf{a}_{mI}$. Термовете $\mathbf{a}_j$, $1 \leq j \leq m$, са получени преди $\mathbf{a}$ и имат променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_n \to U_I \mathbf{a}_{jI}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

От друга страна, тъй като I е интерпретация на $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$ имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}} U_I \mathbf{a}_{1I} \to \cdots \to U_I \mathbf{a}_{mI} \to U_I \mathbf{a}_I$$

и следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_n \to U_I \mathbf{a}_I.$$

Освен това, ако $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ (не обезателно различни) и $\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_m \to \mathbf{A}_I$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$. Наистина, нека $\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_n \to \mathbf{A}_I$ и $\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_k}$ са променливите, които не участват свободно в $\mathbf{A}$. Тогава съгласно теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_{i_1} \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_{i_k} \to \mathbf{A}^{(I)}.$$

Оттук и (П$\exists$)

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists \mathbf{x}_{i_1} U_I \mathbf{x}_{i_1} \to U_I \mathbf{x}_{i_2} \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_{i_k} \to \mathbf{A}^{(I)}.$$

Но I е интерпретация и значи (съгласно теоремата за варианта)

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists \mathbf{x}_{i_1} U_I \mathbf{x}_{i_1},$$

откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I \mathbf{x}_{i_2} \to \cdots \to U_I \mathbf{x}_{i_k} \to \mathbf{A}^{(I)}.$$

Повтаряйки това разсъждение още $k-1$ пъти, получаваме $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$.

Сега ще докажем, че ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$ с индукция по извода в $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}$ е съждителна аксиома, то $\mathbf{A}_I$ също е съждителна аксиома (защото $(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})_I \equiv \mathbf{B}_I \vee \mathbf{C}_I$ и $(\neg\mathbf{B})_I \equiv \neg\mathbf{B}_I$), и следователно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$ съгласно (ТТ). Нека $\mathbf{A}$ е аксиомата за субституцията $\mathbf{B_x}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ и нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са променливите разлчни от $\mathbf{x}$, които са свободни в $\mathbf{B}$ и $\mathbf{a}$. Съгласно доказаното по-горе

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_n \to U_I\mathbf{a}_I.$$

Оттук, аксиомата за субституцията

$$(U_I\mathbf{a}_I \mathbin{\&} \mathbf{B}_{I\,\mathbf{x}}[\mathbf{a}_I]) \to \exists\mathbf{x}(U_I\mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{B}_I)$$

и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_n \to (\mathbf{B}_{I\,\mathbf{x}}[\mathbf{a}_I]) \to \exists\mathbf{x}(U_I\mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{B}_I)),$$

т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}.$$

Ако $\mathbf{A}$ е аксиома за равенството, то $\mathbf{A}_I$ също е аксиома за равенството и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$ съгласно (ТТ). Ако $\mathbf{A}$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$, тъй като I е интерпретация на $\mathcal{F}$ във $\mathcal{F}'$.

Нека сега $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_j$, $1 \le j \le k$. Тогава $\mathbf{A}_I$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{1,I}, \ldots, \mathbf{A}_{k,I}$. При това, $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_j^{(I)}$, $1 \le j \le k$, т.е.

$$\begin{aligned}
&\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_{11} \to \cdot \to U_I\mathbf{x}_{1n_1} \to \mathbf{A}_{1\,I}\\
&\vdots\\
&\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_{1k} \to \cdot \to U_I\mathbf{x}_{1n_k} \to \mathbf{A}_{k\,I},
\end{aligned}$$

където $\mathbf{x}_{j1}, \ldots, \mathbf{x}_{jn_j}$ са променливите със свободни участия в $\mathbf{A}_j$, $1 \le j \le k$. Оттук и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_{11} \to \cdot \to U_I\mathbf{x}_{1n_1} \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_{1k} \to \cdot \to U_I\mathbf{x}_{1n_k} \to U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_n \to \mathbf{A}_I,$$

където $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са променливите със свободни срещения в $\mathbf{A}$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$, съгласно казаното по-горе.

Накрая, нека $\mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ се получава от $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ чрез (П$\exists$). Нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ са променливите свободни в $\mathbf{A}$ (тогава $\mathbf{x}$ не е сред тях). От индукционното предположение и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_m \to U_I\mathbf{x} \to \mathbf{B}_I \to \mathbf{C}_I.$$

От теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (U_I\mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{B}_I) \to U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_m \to \mathbf{C}_I,$$

откъдето от (П$\exists$) имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists\mathbf{x}(U_I\mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{B}_I) \to U_I\mathbf{x}_1 \to \cdots \to U_I\mathbf{x}_m \to \mathbf{C}_I$$

и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^{(I)}$ съгласно (ТТ).

$\square$

Следствие 2.44. Ако I е интерпретация на $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}'$ е непротиворечива, то $\mathcal{F}$ е непротиворечива.

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ е противоречива. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} x \neq x$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} U_i x \to x \neq x$. Оттук $\vdash_{\mathcal{F}'} x = x \to \neg U_I x$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \neg U_I x$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}'} \forall x \neg U_I x$, т.е. $\vdash_{\mathcal{F}'} \neg\exists x \neg\neg U_I x$. Оттук и теоремата за еквивалентната замяна $\vdash_{\mathcal{F}'} \neg\exists x U_I x$. Но I е интерпретация и имаме $\vdash_{\mathcal{F}'} \exists x U_I x$. Следователно $\mathcal{F}'$ е противоречива.

$\square$

Глава 3

Модели на формални системи от първи ред

3.1 Структури за езици от първи ред

Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред. Всяка *структура* $\mathfrak{A}$ за $\mathcal{L}$ се състои от

- непразно множество $|\mathfrak{A}|$, наричано носител на $\mathfrak{A}$;
- n-местна операция $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}$ в $|\mathfrak{A}|$ (т.е. $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$) за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$;
- n-местна релация $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$ в $|\mathfrak{A}|$ (т.е. $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$) за всеки нелогически n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{L}$;

Забележка 1.Бихме могли да разглеждаме и едно малко по-различно понятие за структура, а именно: обобщена структура $\mathfrak{A}$ за $\mathcal{L}$ се състои от

- носителят $|\mathfrak{A}|$ на $\mathfrak{A}$ е непразен клас $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\}$, където $\mathbf{A}$ е формула на ZF, в която $\mathbf{x}$ е единствената свободна променлива.
- за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$, n-местна операция $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ (т.е. $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ е n-местен функционален символ на ZF, получен посредством разширение с дефиниции), такава че

$$\vdash_{ZF} \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_1] \to \cdots \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_n] \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$$

- за всеки n-местен нелогически предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{L}$, n-местна релация $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ (т.е. $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ е n-местен предикатен символ на ZF, получен посредством разширение с дефиниции).

Ако $\mathcal{L}$ е краен език (език с краен брой нелогически символи), а $\mathfrak{A}$ е конкретна структура (в първоначалния смисъл на понятието) за $\mathcal{L}$, то тогава можем да дефинираме съответно класът носител на структурата, операциите и релациите в ZF чрез

- $\mathbf{A} \equiv \mathbf{x} \in |\mathfrak{A}|$;
- $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\mathbf{y} \leftrightarrow ((\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}_{\mathfrak{A}} \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \mathbf{x}_i \in |\mathfrak{A}|) \vee (\emptyset = \mathbf{y} \ \& \ \bigvee_{1 \leq i \leq n} \mathbf{x}_i \notin |\mathfrak{A}|)$.
- $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$

и следователно можем да разглеждаме $\mathfrak{A}$ като обощена структура за $\mathfrak{A}$. Да отбележим, че ако $|\mathfrak{A}|$ не е конкретна структура, то няма да можем да дефинираме $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$, тъй като $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$ не са конкретни множества.

Забележка 2. Обобщените структури са в същност интерпретациите на $\mathcal{L}$ в ZF.

Забележка 3. Можем да разглеждаме класът на всички структури за $\mathcal{L}$, но не можем да разглеждаме класът на всички обобщени структури за $\mathcal{L}$.

Нека $\mathfrak{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$. С $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ ще означаваме езика, който се получава от $\mathcal{L}$, добавяйки нова константа $\mathbf{i}_\alpha$ за всеки елемент $\alpha \in |\mathfrak{A}|$. Константата $\mathbf{i}_\alpha$ ще наричаме име на елемента α. Дефинираме стойността в $\mathfrak{A}$ на затворените термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ чрез следната рекурсия:

(i) $\mathfrak{A}(\mathbf{i}_\alpha) \equiv \alpha$;

(ii) $\mathfrak{A}(\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n) \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_n))$, където $\mathbf{f}$ е n-местен функционален символ на $\mathcal{L}$, а $\mathbf{a}_1$,..., $\mathbf{a}_n$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

Дефинираме стойността в $\mathfrak{A}$ на затворените формули на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ чрез следната рекурсия:

(i) $\mathfrak{A}(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{a}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{b})$, където $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$;

(ii) $\mathfrak{A}(\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n) \equiv \mathbb{T} \iff (\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$, където $\mathbf{p}$ е n-местен нелогически предикате символ на $\mathcal{L}$, а $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$;

(iii) $\mathfrak{A}(\neg\mathbf{A}) \equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases}$, където $\mathbf{A}$ е затворена формула на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

(iii) $\mathfrak{A}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathbb{T}, & \text{иначе} \end{cases}$, където $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са затворена формули на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

(iv) $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T}$ за някое $\alpha \in |\mathfrak{A}|$, където $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$.

С директна проверка се установява, че

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{T} \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathfrak{A}(\mathbf{B}), & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\forall\mathbf{x}\mathbf{C}) &\equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T} \text{ за всяко } \alpha \in |\mathfrak{A}|.
\end{aligned}$$

за произволни затворени формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, а където $\mathbf{C}$ е формула на $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$.