ТЕМА 12: БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

Дефиниция на булева функция

$f:\ J_2^n \to J_2$

$\mathcal{F}_2^n = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0,1\}, i \in I_n, f(\widetilde{\alpha}^n) \in \{0,1\}\}$

$|\mathcal{F}_2^n| = 2^{2^n}$

Представяне на булева функция с таблица

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Основни свойства на булевите функции:

1. Комутативно свойство:
$x \wedge y = y \wedge x;\ x \vee y = y \vee x;\ x \oplus y = y \oplus x$

2. Асоциативно свойство:
$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z);\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

3. Дистрибутивно свойство:
   - на конюнкцията спрямо дизюнкцията: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
   - на дизюнкцията спрямо конюнкцията: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   - на конюнкцията спрямо изключващо или: $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$

4. Свойство идемпотентност: $x \wedge x = x;\ x \vee x = x$

5. Свойства на отрицанието: $x \wedge \overline{x} = \widetilde{0};\ x \vee \overline{x} = \widetilde{1};\ x \oplus \overline{x} = \widetilde{1}$

6. Свойства на константите:
$x \wedge \widetilde{0} = \widetilde{0};\ x \vee \widetilde{0} = x;\ x \oplus \widetilde{0} = x$
$x \wedge \widetilde{1} = x;\ x \vee \widetilde{1} = \widetilde{1};\ x \oplus \widetilde{1} = \overline{x}$

7. Закон за двойното отрицание: $\overline{\overline{x}} = x$

8. Закони на Де Морган: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y};\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Фиктивна променлива на булева функция

Променливата x_i е фиктивна за функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \iff$
$\forall \widetilde{\alpha}' = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n), \widetilde{\alpha}'' = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) : f(\widetilde{\alpha}') = f(\widetilde{\alpha}'')$

Съществена променлива на булева функция

Променливата x_i е съществена за функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \iff$
$\exists \widetilde{\alpha}' = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n), \widetilde{\alpha}'' = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) : f(\widetilde{\alpha}') \neq f(\widetilde{\alpha}'')$

Композиция на булеви функции

Формула над дадено множество от булеви функции. Функция, съпоставена на формула

Задачи за упражнение:

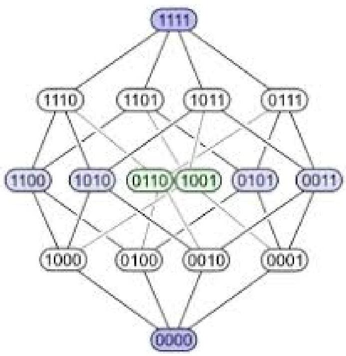
Задача 1: Намерете броя на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които на противоположни вектори приемат:

a) еднакви стойности;

b) различни стойности.

Задача 2: Намерете броя на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които на всяка двойка съседни вектори приемат противоположни стойности.

<u>*Решение:*</u> Да разгледаме дефиниционното множество на функцията:



Ако определим стойността на функцията във вектора $(00...0) \in B_0^n$, то тя се доопределя върху всеки съседен на него вектор от B_1^n. Изобщо, всеки вектор от $B_{i+1}^n, i \in J_{n-1}$ има съседен в B_i^n, така че функцията ще се доопредели и там. И така, след като определим стойността на функцията в B_0^n, тя се доопределя във всеки вектор на дефиниционното си множество, като в слоевете с четни номера стойността й е равна на $f(00, ..., 0)$, а в слоевете с нечетни номера стойността е противоположна.

Така получаваме, че броят на търсените функции е 2.

Задача 3: Да се намери броят на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които изпълняват условието:

a) Върху дадени k вектора функцията има фиксирани стойности, останалите й стойности са произволни;

<u>*Решение:*</u> Стойността на всяка от търсените функции върху дадени k елемента от дефиниционното й множество е фиксирана, така че броят на тези функции зависи от това, по колко начина можем да изберем стойността на функцията върху останалите елементи от дефиниционното множество, а те са $2^n - k$. Тъй като възможните стойности са 2, то броят на търсените в условието функции е 2^{2^n-k}.

b) Върху точно k елемента от дефиниционното си множество функцията има стойност 0.

Решение: Функцията приема стойност 0 върху точно k елемента от дефиниционното си множество, но не е фиксирано точно върху кои. Така задачата за намиране на броя на описаните функции се свежда до задача за намиране броя на k-елементните подмножества на дефиниционното множество на функцията. Всяко от тези подмножества определя точно една от търсените функции - тя приема стойност 0 върху елементите на това подмножество и стойност 1 върху всички останали вектори. Така броят на търсените функции е $\binom{2^n}{k}$.

c) Имат стойност 1 на повече от k вектора.

Решение: Броят на функциите, които имат фиксиран брой единици $|T_f| = i$, се определя от това, в кои вектори на дефиниционното множество са тези стойности. Тъй като искаме единиците да са повече от k, то възможностите са от $k+1$ до 2^n. Така функциите с исканото свойство са: $\sum\limits_{i=k+1}^{2^n} \binom{2^n}{i}$

Задача 4: Да се намери броят на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които изпълняват условието: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$

Решение: Ще дефинираме следното разбиване на дефиниционното множество на функциите: $J_2^n = \bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$, където $A_1 = \{\widetilde{\alpha^n} | \alpha_1 = \alpha_2 = 0\}$, $A_2 = \{\widetilde{\alpha^n} | \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1\}$, $A_3 = \{\widetilde{\alpha^n} | \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0\}$, $A_4 = \{\widetilde{\alpha^n} | \alpha_1 = \alpha_2 = 1\}$.

Елементите на разбиването имат една и съща мощност: $|A_i| = 2^{n-2}, i \in I_4$.

Да разгледаме поведението на функцията върху всяко от множествата $|A_i|, i \in I_4$.

За всеки вектор от множествата A_1 и A_4 е вярно, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$. Така че там стойността на функцията може да е произволна.

Ако определим стойността на функцията във вектор $(0, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in A_2$, то тя се доопределя върху вектор $(1, 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A_3$.

Така стойностите на функцията могат да се избират произволно във всеки вектор от множествата A_1, A_2, A_4 и се доопределят автоматично за векторите от множеството A_3.

Броят на всички такива функции е: $2^{|\{A_1 \cup A_2 \cup A_4\}|} = 2^{3.2^{n-2}}$

Задача 5: Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.

Решение: Ще приложим принципа на включване и изключване за намиране на търсения брой.

Да въведем следните означения:

$F_i \in \mathcal{F}_2^n, i \in I_n$; $F_i = \{f(\widetilde{x}^n) | x_i$ е фиктивна променлива$\}$

Множеството, което ни интересува е: $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n}$

Принципът за включване и изключване ни дава формулата за намиране на неговата мощност:

$$|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n}| = |\mathcal{F}_2^n| - \sum_{i=1}^{n} |F_i| + \sum_{i<j} |F_i \cap F_j| - \dots + (-1)^n |\bigcap_{i=1}^{n} F_i|$$

Отделните събираеми представляват броя на функциите, за които една, две или повече променливи са фиктивни. Мощностите на тези множества са съответно:

$|F_i| = 2^{2^{n-1}}$; $|F_i \cap F_j| = 2^{2^{n-2}}$; $\dots |\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i| = 2^{2^{n-n}}$

и в общия случай $|\bigcap\limits_{l=1}^{k} F_{i_l}| = 2^{2^{n-k}}, k \in I_n$

Така броят на функциите, които нямат фиктивни променливи е:

$$|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n}| = |\mathcal{F}_2^n| - \binom{n}{1}2^{2^{n-1}} + \binom{n}{2}2^{2^{n-2}} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}2^{2^0} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^{2^{n-i}}$$

Задача 6: Да се намери броят на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които имат стойност 0 върху вектори с тегло $\leq \dfrac{n}{2}$.

<u>*Решение:*</u> По аналогия със задача 3c) броят на функциите, които имат фиксиран брой нули $|F_f| = i$, се определя от това, в кои вектори на дефиниционното множество са тези стойности. Тъй като искаме нулите да са във вектори с тегло не повече от $\frac{n}{2}$, то възможностите за теглата на тези вектори са от 0 до $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Съответно броят на векторите с тези тегла е $\sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i}$. Всяка функция с исканото свойство се определя от това, кое подмножество на въпросните вектори е избрано за нейно нулево множество. Така броят на функциите, които ни интересуват е: $2^{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{i}}$

Задача 7: Булевата функция $f(\widetilde{x}^n)$ се нарича симетрична точно тогава, когато $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ за всяка пермутация на променливите. Намерете броя на симетричните булеви функции на n променливи.

<u>*Решение:*</u> Нека $f(x_1, x_2, ..., x_n) : J_2^n \to J_2$ е симетрична булева функция на n променливи. Да разгледаме произволен вектор от дефиниционното множество на функцията $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Тъй като функцията е симетрична, то $f(\widetilde{\alpha}) = f(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$, за всеки вектор $\alpha' = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$, получен чрез пермутация на елементите на вектора $\widetilde{\alpha}$. Но това са всички вектори, които имат тегло, равно на теглото на $\widetilde{\alpha}$.

И така, ако определим стойността на функцията в един вектор, то тя се доопределя върху всички вектори със същото тегло. Различните възможни тегла на вектори в J_2^n са $n+1$, следователно броят на търсените функции е 2^{n+1}.

Задача 8: Да се провери дали за следната функция променливата x_1 е фиктивна:

a) $f(\widetilde{x}^2) = (x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \downarrow x_1)$

<u>*Решение:*</u> За да проверим кои променливи на функцията са фиктивни, първо ще построим стълба на функцията:

x_1	x_2	$x_2 \to x_1$	$x_2 \downarrow x_1$	$(x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \downarrow x_1)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0

От таблицата се вижда, че $f(00) \neq f(10) \Rightarrow$ променливата x_1 е съществена за функцията.

b) $f(\widetilde{x}^2) = (x_2x_1) \vee (x_1|x_2)$

<u>*Решение:*</u> Отново първо ще построим стълба на функцията:

x_1	x_2	x_2x_1	$x_1\|x_2$	$(x_2x_1) \vee (x_1\|x_2)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

От таблицата се вижда, че $f(00) = f(10) \wedge f(01) = f(11) \;\Rightarrow$ променливата x_1 е фиктивна за функцията. Същото се отнася и за другата променлива - виждаме, че $f(00) = f(01) \wedge f(10) = f(11) \;\Rightarrow$ променливата x_2 е фиктивна. Това е една от двете функции-константи, които нямат съществени променливи.

c) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3 \wedge (\overline{x_3 \rightarrow x_2})$

Задача 9: Да се докаже, че ако $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ са два вектора, такива че $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$, то съществуват съседни вектори $\widetilde{\alpha}_1 \preceq \widetilde{\beta}_1$, такива че $f(\widetilde{\alpha}_1) \neq f(\widetilde{\beta}_1)$.

Задача 10: Да се докаже, че ако за векторите $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \preceq \widetilde{\gamma}$ е изпълнено условието $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta}) \wedge f(\widetilde{\beta}) \neq f(\widetilde{\gamma})$, то функцията има поне две съществени променливи.

Задача 11: Да се докаже, че симетрична функция, различна от константа, зависи съществено от всичките си променливи.

Задача 12: Нека функциите $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{y}^m)$ зависят от всичките си променливи и $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \cap \{y_1, y_2, ..., y_m\} = \emptyset$. Да се докаже, че $f(g(y_1, y_2, ..., y_m), x_2, ..., x_n)$ зависи от всичките си променливи.

Задача 13: Нека за функциите $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ е изпълнено $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{x}^n) = 1$ на нечетен брой вектори. Да се докаже, че всяка от променливите $x_i, i \in I_n$ е съществена за поне една от тях.

Задача 14: Като се използва таблицата на функциите на две променливи да се установи еквивалентни ли са формулите:

a) $x \vee y$; $\quad (x \rightarrow y) \rightarrow y$

b) $x \equiv y$; $\quad (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

c) $x \downarrow y$; $\quad ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$

d) $x \vee (y \equiv z)$; $\quad (x \vee y) \equiv (x \vee z)$

Задача 15: Дадени са функциите:

a) $f = (1011)$ и $g = (1001)$

b) $f = (1000)$ и $g = (0111)$

Да се определи функцията:

a) $h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2)$

b) $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$

<u>*Решение:*</u> Ще решим:

1) комбинацията от двете подточки а) - ще определим стълба на $h_1(x_2, x_3, x_4) = f_1(g_1(x_3, x_4), x_2)$, където $f_1 = (1011)$ и $g_1 = (1001)$;

2) комбинацията от подточки b) и a) - определяне $h_2(x_2, x_3, x_4) = f_2(g_2(x_3, x_4), x_2)$, където $f_2 = (1000)$ и $g_2 = (0111)$.

x_2	x_3	x_4	$g_1(x_3, x_4)$	$h_1 = f_1(g_1(x_3, x_4), x_2)$	$g_2(x_3, x_4)$	$h_2 = f_2(g_2(x_3, x_4), x_2)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0

Задача 16: Да се провери еквивалентни ли са следните формули, като се използват основните тъждества:

а) $\varphi = (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x}z \to ((\overline{x}|(y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \oplus z)))$
$\psi = ((x \to y)|(x \downarrow (y\overline{z}))) \vee \overline{yz}$

б) $\varphi = (x \to y) \to ((x\overline{y}) \oplus (x \equiv \overline{y}))$; $\quad \psi = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$

в) $\varphi = x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z)$; $\quad \psi = y \to (x \to z)$

Задача 17: Да се докаже, че следните формули са еквивалентни:

$\mathfrak{A} = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z)) \vee xz$

$\mathfrak{B} = (y \to (x \vee z)) \oplus xz \oplus 1$

<u>*Решение:*</u> Две формули са еквивалентни ако представят една и съща функция.

Следната таблица съдържа функциията, представена с формулата $\mathfrak{A}$.

x	y	z	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x} \to (y \to z)$	xz	$(x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z))$	$\mathfrak{A}$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

Следната таблица съдържа функциията, представена с формулата $\mathfrak{B}$.

x	y	z	$x \vee z$	$y \to (x \vee z)$	$xz \oplus 1$	$\mathfrak{B}$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1

Очевидно формулите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ представят една и съща функция, следователно са еквивалентни.

Задача 18: Да се опрости следната формула:

a) $(\overline{\overline{x} \vee \overline{x}})(\overline{\overline{y} \vee \overline{y}}) \vee (x \vee xy)(\overline{y \vee z}) \vee xyz$

b) $\overline{xy \vee yz} \vee \overline{xy \vee xz} \vee \overline{xz \vee yz}$

c) $(xy \vee \overline{xy})z \vee xy\overline{z}$

Задача 19: Постройте таблицата на функцията f, представена чрез формулата φ над множеството от функции $F = \{\neg, \wedge, \vee, \oplus, \to, \downarrow, |, \equiv\}$:

a) $\varphi = (x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$

b) $\varphi = \neg(\neg x \vee y) \vee (x \wedge \neg z) \downarrow (x \equiv y)$

c) $\varphi = \neg x \to (\neg z \equiv (y \oplus (x \wedge z)))$

d) $\varphi = (((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$