ДИС-2, специалност „Информатика“, Финален тест, 20.06.2006 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(5 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

2. *(10 точки)* Нека $a_n \neq 0$ за $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и съществува границата $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\frac{1}{L}$.

3. *(15 точки)* Коефициентите на Фурие на функцията $f(x) = |x| + x$ в интервала $[-\pi,\ \pi]$ са:

$a_0 =$, $(n \geq 1)$ $a_n =$, $(n \geq 1)$ $b_n =$.

Равенството на Парсевал за същата функция е:

4. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = -1$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

5. *(15 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за равенство на смесените производни.

обърни

6. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:

Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

7. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството ∂A от граничните точки на ограниченото множество A има мярка нула, то A е измеримо.

8. *(17 точки)* Нека $P(x,y) = \left(x^2 - xy + 2x - y\right) e^{x+y}$ и $Q(x,y) = \left(x^2 - xy - x\right) e^{x+y}$.

а) Ако $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ и C е частично гладка крива с начало A и край B докажете, че интегралът $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи от C.

б) Ако $A = (0,0)$, $B = (a,b)$ и C е частично гладка крива с начало A и край B пресметнете интеграла $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad =$$

в) Намерете функция $U(x,y)$, за която $U(1,-1) = 1$ и $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ за всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$U(x,y) \; =$

ДИС-2, специалност „Информатика“, Финален тест, 20.06.2006 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(5 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

2. *(10 точки)* Нека съществува границата $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\frac{1}{L}$.

3. *(15 точки)* Коефициентите на Фурие на функцията $f(x) = |x| - x$ в интервала $[-\pi, \pi]$ са:

$a_0 =$, $(n \geq 1)$ $a_n =$, $(n \geq 1)$ $b_n =$.

Равенството на Парсевал за същата функция е:

4. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \frac{y^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 2$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

5. *(15 точки)* Формулирайте и докажете правилото за пресмятане на частните производни на съставна функция.

обърни

6. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:

Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

7. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството A е измеримо, то множеството ∂A от граничните му точки има мярка нула.

8. *(17 точки)* Нека $P(x,y) = \left(y^2 + xy + y\right) e^{x-y}$ и $Q(x,y) = \left(2y + x - y^2 - xy\right) e^{x-y}$.

а) Ако $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ и C е частично гладка крива с начало A и край B докажете, че интегралът $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи от C.

б) Ако $A = (0,0)$, $B = (a,b)$ и C е частично гладка крива с начало A и край B пресметнете интеграла $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad =$$

в) Намерете функция $U(x,y)$, за която $U(2,2) = 2$ и $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ за всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$U(x,y) \ =$

ДИС-2, специалност „Информатика“, Финален тест, 20.06.2006 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(5 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

2. *(10 точки)* Нека $a_n \neq 0$ за $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\dfrac{1}{L}$.

3. *(15 точки)* Коефициентите на Фурие на функцията $f(x) = |x|$ в интервала $[-\pi,\ \pi]$ са:

$a_0 =$, $(n \geq 1)$ $a_n =$, $(n \geq 1)$ $b_n =$.

Равенството на Парсевал за същата функция е:

4. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 3$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

5. *(15 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за равенство на смесените производни.

обърни

6. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:
Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

7. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството ∂A от граничните точки на ограниченото множество A има мярка нула, то A е измеримо.

8. *(17 точки)* Нека $P(x,y) = \left(y^2 - xy - y\right) e^{x+y}$ и $Q(x,y) = \left(y^2 - xy - x + 2y\right) e^{x+y}$.

а) Ако $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ и C е частично гладка крива с начало A и край B докажете, че интегралът $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи от C.

б) Ако $A = (0,0)$, $B = (a,b)$ и C е частично гладка крива с начало A и край B пресметнете интеграла $\displaystyle\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad =$$

в) Намерете функция $U(x,y)$, за която $U(-1,1) = 3$ и $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ за всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$U(x,y) \ =$

ДИС-2, специалност „Информатика“, Финален тест, 20.06.2006 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(5 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

2. *(10 точки)* Нека съществува границата $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\frac{1}{L}$.

3. *(15 точки)* Коефициентите на Фурие на функцията $f(x) = x - |x|$ в интервала $[-\pi, \pi]$ са:

$a_0 =$, $(n \geq 1)$ $a_n =$, $(n \geq 1)$ $b_n =$.

Равенството на Парсевал за същата функция е:

4. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{y^4 - 4x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = -4$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

5. *(15 точки)* Формулирайте и докажете правилото за пресмятане на частните производни на съставна функция.

обърни

6. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:

Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

7. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството A е измеримо, то множеството ∂A от граничните му точки има мярка нула.

8. *(17 точки)* Нека $P(x,y) = \left(x^2 + xy + 2x + y\right) e^{x-y}$ и $Q(x,y) = \left(x - y^2 - xy\right) e^{x-y}$.

а) Ако $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ и C е частично гладка крива с начало A и край B докажете, че интегралът $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи от C.

б) Ако $A = (0,0)$, $B = (a,b)$ и C е частично гладка крива с начало A и край B пресметнете интеграла $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

$$\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad =$$

в) Намерете функция $U(x,y)$, за която $U(-1,-1) = 4$ и $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ за всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$U(x,y) \ =$