Нека с $\mathcal{S}$ означим множеството от всички множества Δ от затворени формули на $\mathcal{F}$, такива че $\mathcal{F}[\Delta]$ е непротиворечива. Твърдим, че $\mathcal{S}$ е фамилия с краен характер. Наистина, ако $\Delta \in \mathcal{S}$, то $\Delta' \in \mathcal{S}$ за всяко крайно $\Delta' \subseteq \Delta$. Обратно, нека $\Delta' \in \mathcal{S}$ за всяко крайно $\Delta' \subseteq \Delta$. Да допуснем, че $\Delta \notin \mathcal{S}$, т.е. $\mathcal{F}[\Delta]$ е противоречива. Тогава съгласно теоремата за редукцията за противоречивост $\vdash_{\mathcal{F}} \neg \mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n$ за някои формули $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ от Δ (Δ се състои от затворени формули). Нека $\Delta' = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n\}$. Тогава отново съгласно теоремаза за редукцията за противоречивост $\mathcal{F}[\Delta']$ е противоречива, което противоречи на предположението ни за Δ. Следователно $\mathcal{F}[\Delta]$ е непротиворечива и значи $\Delta \in \mathcal{S}$.

Нека Γ е максимален елемент на $\mathcal{S}$ по отношение на $\subseteq$ и да разгледаме $\mathcal{F}[\Gamma]$. Ясно е, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е непротиворечива. За да докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е пълна нека разгледаме една затворена формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ и нека $\nvdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \neg \mathbf{A}$. Тогава $\mathcal{F}[\Gamma \cup \{\mathbf{A}\}]$ е непротиворечива и значи $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} \in \mathcal{S}$. Но Γ е максимален елемент на $\mathcal{S}$ по отношение на $\subseteq$ и значи $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} = \Gamma$. Следователно $\mathbf{A} \in \Gamma$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}$. $\square$

3.5 Теорема на Гьодел за пълнота

Нека $\mathcal{F}$ е формална система, съдържаща поне една константа. С $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ ще означаваме множеството от всички затворени термове на $\mathcal{F}$. В $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ въвеждаме релация $\sim$ чрез

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Тъй като $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}$, то $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна релация и значи $\sim$ е релация на еквивалентност. Стандартна структура за $\mathcal{F}$ ще наричаме структурата $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$, където

- $|\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}| = \mathcal{C}_{\mathcal{F}} / \sim$.
- $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \ldots, [\mathbf{a}_n]) \equiv [\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$ за всеки n-местен функционален $\mathbf{f}$ на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.
- $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}} \equiv \{([\mathbf{a}_1], \ldots, [\mathbf{a}_n]) \mid \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n\}$ за всеки нелогически n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

$[\mathbf{a}]$ е
лентно
$\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ по

За да се убедим, че интерпретацията на функционалните символи е коректна (т.е., че не зависи от избора на представител на класа на еквивалентност), нека разгледаме един n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и нека $[\mathbf{a}_1] \equiv [\mathbf{b}_1], \ldots, [\mathbf{a}_n] \equiv [\mathbf{b}_n]$. Тогава за $1 \leq i \leq n$ имаме $\mathbf{a}_i \sim \mathbf{b}_i$, т.е. $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$, откъдето съгласно теоремата за равенството $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n = \mathbf{f}\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$ и значи

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \ldots, [\mathbf{a}_n]) &\equiv [\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n] \\
&\equiv [\mathbf{f}\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n] \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{b}_1], \ldots, [\mathbf{b}_n]).
\end{aligned}$$

Лема 3.10. Нека $\mathcal{F}$ е формална система с поне един нуламестен функционален символ. Тогава

(i) $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) \equiv [\mathbf{a}]$ за всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

(ii) $\mathfrak{A} \models \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ за всяка затворена *атомарна* формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$.

Доказателство. За да докажем (i) нека $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тогава $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{F}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тъй като тези термове са получени преди $\mathbf{a}$ можем да считаме, че за тях вече сме доказали $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_i) \equiv [\mathbf{a}_i]$, откъдето

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \\
&\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \ldots, [\mathbf{a}_n]) \\
&\equiv [\mathbf{f}\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \\
&\equiv [\mathbf{a}].
\end{aligned}$$

За докажем (ii) нека първо $\mathbf{A}$ е $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, където $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тогава, тъй като $\mathbf{A}$ е затворена,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A} &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \equiv \mathbb{T} \\
&\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{b}) \\
&\iff [\mathbf{a}] \equiv [\mathbf{b}] \\
&\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{A}$ е $\mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n$ за някой нелогически n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Нека първо

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}.$$

Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето

$$(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}$$

и значи

$$([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}.$$

Оттук

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{pb}_1 \dots \mathbf{b}_n$$

за някои $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, такива че $[\mathbf{a}_i] \equiv [\mathbf{b}_i]$ за $1 \leq i \leq n$. Но тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$$

за $1 \leq i \leq n$. Оттук и теоремата за равенството

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n,$$

т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.$$

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n.$$

Тогава

$$([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}$$

откъдето

$$(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}$$

и значи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}.$$

□

Дефиниция 3.11. Ще казваме, че една формална система е хенкинова, ако за всяка затворена формула $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ съществува константа (нуламестен функционален символ) c на $\mathcal{F}$, такава че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[c].$$

Твърдение 3.12. Нека $\mathcal{F}$ е пълна хенкинова формална система. Тогава за всяка затворена формула $\mathbf{D}$ на $\mathcal{F}$ е в сила

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}.$$

В частност $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathcal{F}$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по построението на затворените формули на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{D}$ е атомарна формула, то твърдението следва от предната лема. Нека сега $\mathbf{D} \equiv \neg \mathbf{A}$. Тогава $\mathbf{A}$ е затворена и предвид индукционното предположение и пълнотата на $\mathcal{F}$ имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} \quad &\iff \quad \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F} \\ &\iff \quad \nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \\ &\iff \quad \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{D} \equiv \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са затворени и предвид индукционното предположение и пълнотата на $\mathcal{F}$ имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T} \text{ или } \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{T} \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \text{ или } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Накрая нека $\mathbf{D} \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{A}$. Нека първо $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D}$, т.е.

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}.$$

Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_{[\mathbf{a}]}]) \equiv \mathbb{T}$$

за някое $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Оттук и $[\mathbf{a}] \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a})$ получаваме

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето, съгласно индукционното предположение,

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}].$$

Оттук, аксиомата $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists \mathbf{x} \mathbf{A}$ и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}.$$

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}$, т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x} \mathbf{A}.$$

Тогава, предвид хенкиновостта на $\mathcal{F}$,

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[c]$$

за някоя константа c. Оттук и индукционното предположение

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_x b[c]) \equiv \mathbb{T}.$$

Нека $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(c) \equiv \alpha$ $(\alpha \in |\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}|)$. Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_{\alpha}]) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{D}.$$

Сега, ако $\mathbf{A}$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, а $\mathbf{A}'$ е универсално затваряне на $\mathbf{A}'$, имаме $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$, откъдето $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}'$ и значи $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}$. Следователно $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathcal{F}$.

□

Твърдение 3.13. Всяка формална система има консервативно хенкиново разширение.

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ е формална система. Дефинираме специалните константи от ниво $n \geq 1$ за $\mathcal{F}$ чрез следната индукция. Нека κ е символ, който не се съдържа в $\mathcal{F}$. Ако $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$ е затворена формула на $\mathcal{F}$, то символът $\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}}$ е специална константа от ниво 1, отнасяща се за $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$. Нека сега $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$ е затворена формула, съставена от символите на $\mathcal{F}$ и специални константи от нива, по-малки или равни на n, и съдържаща поне една специална константа от ниво n. Тогава символът $\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}}$ е специална константа от ниво $n+1$, отнасяща се за $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$.

Ако $\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}}$ е специална константа, то формулата

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}}]$$

ще наричаме специална аксиома за $\kappa_{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}}$. Нека с $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки всички специални константи (от всички нива $n \geq 1$). Съгласно теоремата за константите, $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. Нека Γ е множеството от всички специални аксиоми. Ясно е, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е хенкинова формална система. Твърдим, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$ и нека $\vdash_{\mathcal{F}'[\Gamma]} \mathbf{A}$. Съгласно теоремата за редукцията

Γ е м
рени

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A},$$

където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ са специални аксиоми. Предвид теоремата за тавтологиите можем да считаме, че $\mathbf{A}_1$ се отнася за специална константа $\kappa_{\exists \mathbf{x}\mathbf{A}}$ от възможно най-високо ниво. Тогава $\mathbf{A}_1 \equiv$
$exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\kappa_{\exists \mathbf{x}\mathbf{A}}]$ и $\kappa_{\exists \mathbf{x}\mathbf{A}}$ не се среща в нито една от формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}$. Тогава, съгласно теоремата за константите, ако $\mathbf{y}$ е нова променлива, то

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$$

Оттук и (П$\exists$) (тъй като $\mathbf{y}$ не участва във формулите $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}$) получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists \mathbf{y}(\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Съгласно пренексните операции (и тъй като $\mathbf{y}$ не участва в $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}$ имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists \mathbf{y}(\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \leftrightarrow (\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]).$$

Оттук и теоремата за еквивалентната замяна

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Но $\exists \mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$ е вариант на $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}$ и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}].$$

Следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}.$$

Повтаряйки това разсъждение още $n-1$ пъти получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.$$

Следователно $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно хенкиново разширение на $\mathcal{F}$.

□

Теорема 3.14 (Теорема за пълнота (първи вариант))**.** Всяка непротиворечива формална система има модел.

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ е непротиворечива формална система. Нека $\mathcal{F}'$ е консервативно хенкиново разширение на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F}'$ е непритоворечива. Съгласно теоремата на Линденбаум $\mathcal{F}'$ има пълно разширение $\mathcal{F}''$ (като при това $\mathcal{L}(\mathcal{F}'') \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}')$. Следователно $\mathcal{F}''$ е пълно хенкиново разширение на $\mathcal{F}$ и значи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''} \models \mathcal{F}''.$$

Нека $\mathfrak{A}$ е обедняването на $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Тогава, тъй като $\mathcal{F}''$ е разширение на $\mathcal{F}$, получаваме

$$\mathfrak{A} \models \mathcal{F}.$$

□

Теорема 3.15 (Теорема на Гьодел за пълнота)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. Тогава, ако $\mathbf{A}$ е вярна във всеки модел на $\mathcal{F}$, то $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}'$ е универсално затаваряне на $\mathbf{A}$. Да допуснем, че $\nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$. Тогава $\mathcal{F}[\neg\mathbf{A}']$ е непротиворечива и следователно $\mathcal{F}[\neg\mathbf{A}']$ има модел $\mathfrak{A}$. Тогава $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}$ и съгласно условието $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$. Тогава $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}'$, което противоречи на $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}[\mathbf{A}']$. Следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

□

3.6 Теорема за компактност