4.3 Ортогонални полиноми

Дефиниция 1. *Казваме, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са* ***ортогонални*** *в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$, ако $(f,g)=0$. Тук с (f,g) сме означили скаларното произведение на функциите f и g*

$$(f,g) = \int_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

Дефиниция 2. *Казваме, че $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ е (крайна или безкрайна) редица от ортогонални полиноми в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$, ако*

$$\begin{aligned}
&1)\ P_i \in \pi_i, \quad \forall i,\\
&2)\ (P_i, P_i) \neq 0, \quad \forall i,\\
&3)\ (P_i, P_j) = 0, \quad \forall i \neq j.
\end{aligned}$$

Задача 1. Да се докаже, че функциите $f(x)=1$ и $g(x)=\cos x$ са ортогонални в $[0,\pi]$ с тегло $\mu(x)=1$.

Решение. Казано с други думи, трябва да докажем, че

$$\int_0^\pi \mu(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

Имаме

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \,\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0$$

и следователно функциите действително са ортогонални с тегло $\mu(x)=1$ в $[0,\pi]$. □

Задача 2. Да се докаже, че функциите x и $\frac{1}{2}(3x^2-1)$ са ортогонални в $[-1,1]$ с тегло $\mu(x)=1$.

Решение.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(3x^3-x)dx = \frac{1}{2}\left(3\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1 = 0$$

□

Задача 3. Да се намерят първите 3 ортогонални полинома (P_0, P_1, P_2) в интервала $[0,1]$ и тегло $\mu(x)=x$ със старши коефициент 1.

Решение. Според условие 1) от Дефиниция 2, $P_0 \in \pi_0$, т.е. P_0 е константа и тъй като искаме старшият коефициент на търсените полиноми да бъде 1, то

$$P_0(x) \equiv 1.$$

Пак вземайки предвид условие 1 на дефиницията, заключаваме, че P_1 трябва да бъде полином от π_1 и затова го търсим във вида $P_1(x) = x + a$ (старшият коефициент искаме да бъде 1). Неизвестният свободен член a ще намерим, като имаме предвид, че P_0 и P_1 трябва да са ортогонални в $[0,1]$ с тегло $\mu(x) = x$, т.е.

$$\int_0^1 x.1.(x+a)dx = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{a}{2} = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

Така получихме, че

$$P_1(x) = x - \frac{2}{3}.$$

Аналогично постъпваме и за да намерим P_2. Търсим го във вида $P_2(x) = x^2 + bx + c$. Имаме

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 x(x^2+bx+c)dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 x\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2+bx+c)dx = 0 \end{array} \right.$$

Решаваме тази система например с Mathematica:

```
In[2]:= Solve[{Integrate[x (x^2 + b x + c), {x, 0, 1}] == 0,
    Integrate[x (x - 1/3) (x^2 + b x + c), {x, 0, 1}] == 0}, {b, c}]
```

Получаваме, $b = -\frac{6}{5}$, $c = \frac{3}{10}$. Тогава

$$P_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}.$$

Лесно се проверява и че са изпълнени условията $(P_i, P_i) \neq 0$, $i = 0, 1, 2$. $\square$

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991