ТЕМА 14: КРИТЕРИЙ ЗА ПЪЛНОТА НА МНОЖЕСТВО ОТ БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

Затворени/предпълни подмножества на $\mathcal{F}_2$: T_0, T_1, S, M ***и*** L

Затворено множество T_0 : функции, запазващи нулата

$$T_0 = \{f | f(\widetilde{0}) = 0\}$$

Затворено множество T_1 : функции, запазващи единицата

$$T_1 = \{f | f(\widetilde{1}) = 1\}$$

Затворено множество S : самодвойнствени функции

$$S = \{f | f(\widetilde{x}) = \overline{f}(\overline{\widetilde{x}})\}$$

Затворено множество M : монотонни функции

$$M = \{f | \widetilde{\alpha}_i \preceq \widetilde{\alpha}_j \to f(\widetilde{\alpha}_i) \leq f(\widetilde{\alpha}_j)\}$$

Затворено множество L : линейни функции

$$L = \{f | f(\widetilde{x}) = x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \cdots \oplus x_{i_k} \oplus \sigma\}$$

Критерий на Пост-Яблонски: Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$. Множеството F е пълно тогава и само тогава, когато не е подмножество на нито едно от множествата T_0, T_1, S, M и L.

Шеферова функция f***:*** $[f] = \mathcal{F}_2$

Задачи за упражнение:

Задача 1: Да се определи затворената обвивка на всяко от следните множества от булеви функции:

a) $\mathcal{F}_2 \setminus (T_0 \cup T_1 \cup S \cup M \cup L)$
b) $M \setminus (T_0 \cup L)$
c) $M \setminus (T_0 \cap T_1)$
d) $T_0 \cap (L \setminus S)$
e) $S \setminus (T_0 \setminus T_1)$

Задача 2: Може ли функцията f да се представи с формула над множеството F:

a) $f = x \oplus y$; $F = \{x \to y\}$
b) $f = x \to y$; $F = \{x \vee y, x \wedge y\}$
c) $f = \overline{x} \vee \overline{y}$; $F = T_0 \cup (S \setminus (L \cup T_1))$

Задача 3: Да се провери пълно ли е множеството от булеви функции:

a) $\{x \to y, x \to \overline{y}z\}$

b) $\{x\overline{y}, \overline{x} \equiv yz\}$

c) $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$

d) $(S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))$

e) $(S \cap M) \cup (L \setminus M) \cup (T_0 \setminus S)$

Задача 4: Да се докаже, че ако една функция е самодвойнствена, то при отъждествяване на променливите й се получава идентитетът или отрицанието.

Задача 5: Да се докаже, че ако една булева функция е монотонна, то и нейната двойнствена функция е монотонна.

Задача 6: Да се докаже, че ако върху всеки два съседни вектора булевата функция приема различни стойности, то тя е линейна. Вярно ли е обратното?

Задача 7: Докажете, че всяка линейна функция, която зависи съществено от поне две променливи, не е монотонна.

Задача 8: Да се докаже, че: $M \cup L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S$

Задача 9: Да се намери броят на шеферовите функции на n променливи.

Задача 10: Проверете шеферова ли е следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^n) = (01111111)$

b) $f(\widetilde{x}^n) = (11100000)$

c) $f(\widetilde{x}^n) = (01110111)$

Задача 11: Да се докаже, че $f(\widetilde{x}^n) \in \mathcal{F}_2$ е шеферова функция точно тогава, когато $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

Задача 12: За кои стойности на параметрите a, b и броя на променливите n е шеферова следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^n) = a \oplus \sum\limits_{1 \leq i < j \leq j} x_i x_j$

b) $f(\widetilde{x}^n) = a \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus ... \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$

c) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)...(x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$

d) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1|x_2) \oplus (x_2|x_3) \oplus ... \oplus (x_{n-1}|x_n) \oplus (x_n|x_1)$

Задача 13: Да се докаже, че ако $f(\widetilde{x}^n)$ зависи от поне две променливи и $f \in S \cap M$, то множеството $\{\widetilde{0}, \overline{f}\}$ е пълно.

Задача 14: Да се провери пълно ли е даденото множество функции и ако е - да се отделят всички базиси:

a) $\{x \oplus y, xy \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus \widetilde{1}, xy \vee xz \vee yz\}$

b) $\{\widetilde{1}, \overline{x}, xy(x \oplus y), x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus xz\}$

c) $\{\widetilde{0}, x \oplus y, x \to y, xy \equiv xz\}$

Задача 15: Определете всички едноелементни и двуелементни базиси на $\mathcal{F}_2$, които са подмножества на $\mathcal{F}_2^2$.

Задача 16: Да се докаже, че произволен базис в $\mathcal{F}_2$ съдържа не повече от 4 функции.

Задача 17: Функция на три променливи е представена със следната формула:

$f(x, y, z) = (\overline{x} \to (y \to z)) \oplus xz \oplus 1$

a) Намерете стълба на функцията:

Решение:

$f(x, y, z) = (00100101)$

b) Определете съвършената дизюнктивна нормална форма на функцията:

Решение:

$f(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz$

c) Представете функцията с полином на Жегалкин:

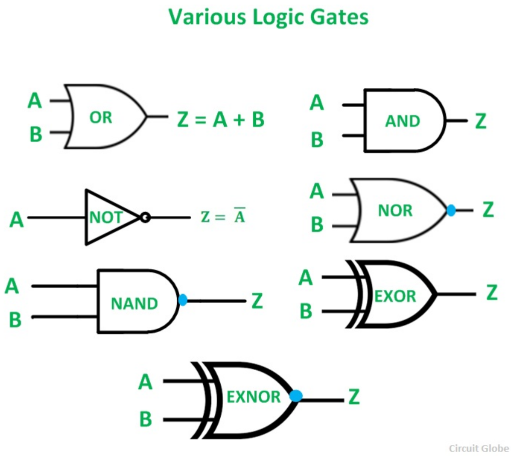
Решение:

$f(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus y$

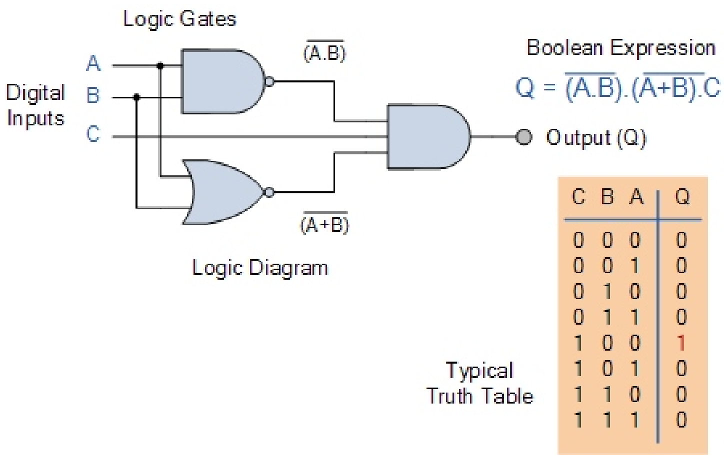
d) Проверете принадлежността на функцията към всяко от предпълните множества:

Решение:

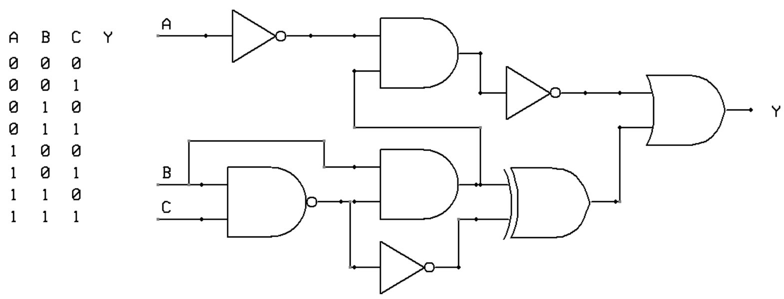
$f \in T_0; \quad f \in T_1; \quad f \notin S; \quad f \notin L; \quad f \notin M$



Пример: Схема, представяща булева функция.

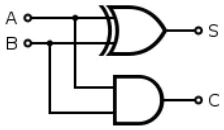


Пример: Коя е булевата функция, представена със следната схема:

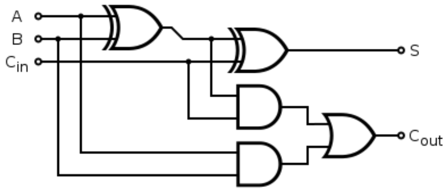


Реализация на двоичен суматор

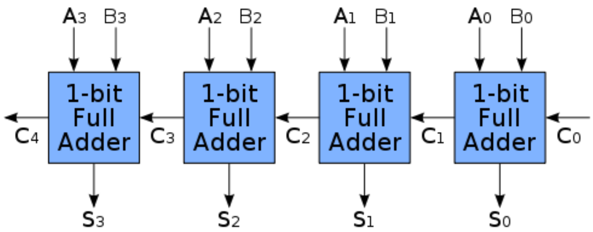
Частичен суматор $Sum = A \oplus B$; $Cout = A \wedge B$



Пълен суматор $Sum = A \oplus B$; $Cout = A \wedge B \vee Cin \wedge (A \oplus B)$

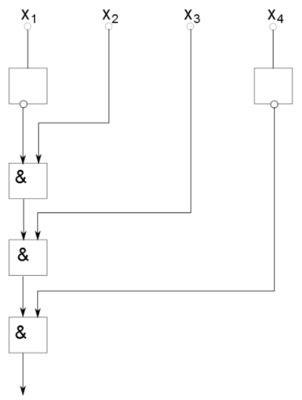


Суматор на трицифрени числа

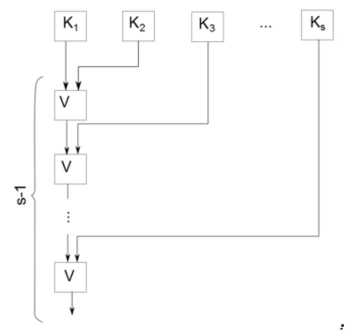


Синтез на схеми от функционални елементи, реализиращи булеви функции

Пример: Синтез на схеми в базиса $\{\overline{x}, xy, x \vee y\}$ на основата на СвДНФ.



Схема, реализираща конюнкцията $K = \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$



Схема, реализираща дизюнкцията $f(\widetilde{x}^4) = \bigvee_{i=1}^{s} K_i$