Решения на контролното по ДАА на 03.май.2010

Зад. 1 Подредете по асимптотично нарастване следните функции. Обосновете отговорите си.

$$n, \quad n^{n!}, \quad (n!)^n, \quad n^{\frac{1}{\lg n}}, \quad n^{\frac{1}{\lg \lg n}},$$

$$\sqrt{n}(\lg n)^2 + \sqrt[3]{n}(\lg n)^3, \quad (n^2 + n(\lg n)^2)2^n, \quad n + n^2 \lg n, \quad \binom{2n}{n}, \quad \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i},$$

$$\frac{\sqrt{5}^n}{(\lg n)^5}, \quad \frac{\lg n}{\lg \lg n}, \quad n^{\lg \lg n}, \quad \sqrt[n]{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}}, \quad 2^{2^n}$$

Решение: Нека за краткост пишем „$f(n) \prec g(n)$“ наместо „$f(n) = o(g(n))$“ и „$f(n) \approx g(n)$“ наместо „$f(n) = \Theta(g(n))$“. Използвайки тази нотация: $n^{\frac{1}{\lg n}} \prec n^{\frac{1}{\lg \lg n}}$, тъй като $\lg\left(n^{\frac{1}{\lg n}}\right) = 1$, а $\lg\left(n^{\frac{1}{\lg \lg n}}\right) = \frac{\lg n}{\lg \lg n}$. След това $n^{\frac{1}{\lg \lg n}} \prec \frac{\lg n}{\lg \lg n}$, тъй като вече показахме, че функцията вляво е логаритъмът на функцията вдясно. След това $\frac{\lg n}{\lg \lg n} \prec \sqrt{n}(\lg n)^2 + \sqrt[3]{n}(\lg n)^3$, тъй като ф-ята вдясно е $\Omega(n^{\epsilon})$ за положително ϵ, ф-ята вляво е $O(\lg n)$, а ние знаем, че логаритмичната ф-я расте асимптотично по-бавно от n^{ϵ} за всяко положително ϵ. След това $\sqrt{n}(\lg n)^2 + \sqrt[3]{n}(\lg n)^3 \prec n$ по аналогична причина: ако образуваме отношението $\frac{\sqrt{n}(\lg n)^2 + \sqrt[3]{n}(\lg n)^3}{n}$, то е равно на $\frac{(\lg n)^2 + (n)^{-\frac{1}{6}}(\lg n)^3}{\sqrt{n}}$ и прилагайки вече цитирания факт, извеждаме $\lim_{n\to\infty} \frac{(\lg n)^2 + (n)^{-\frac{1}{6}}(\lg n)^3}{\sqrt{n}} = 0$. След това $n \approx \sqrt[n]{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}}$. За да се убедим, че това е така, прилагаме апроксимацията на Стирлинг за факториела и функцията вдясно става (приблизително, но със сигурност със същата степен на асимптотично нарастване като) $\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{e^n}\right)}{\sqrt{2\pi n}}} = \frac{n}{e}$. След това $n \prec n + n^2 \lg n$, което е очевидно. След това $n + n^2 \lg n \prec n^{\lg \lg n}$, тъй като логаритмуването на двете страни води до съответно $\Theta(\lg n)$ и $\Theta(\lg n \;\lg \lg n)$. След това $n^{\lg \lg n} \prec \frac{\sqrt{5}^n}{(\lg n)^5}$, тъй като логаритмуването на двете страни води до съответно $\Theta(\lg n \;\lg \lg n)$ и $\Theta(n)$. След това $\frac{\sqrt{5}^n}{(\lg n)^5} \prec \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$. За да се убедим в това, правим следните еквивалентни преобразувания върху сумата: $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i(i-1)!} = n\sum_{i=1}^{n} \cancel{i}\frac{(n-1)\dots(n-i+1)}{\cancel{i}(i-1)!} = n\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-i+1)}{(i-1)!} = n\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)\dots(n-i)}{i!} = n\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)\dots((n-1)-i+1)}{i!} = n2^{n-1}$. Последното равенство следва от теоремата на Нютон, приложена върху бинома $(1+1)^{n-1}$.

След това $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} \prec (n^2 + n(\lg n)^2)2^n$, което е очевидно, имайки предвид изведения факт, че $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$. След това $(n^2 + n(\lg n)^2)2^n \prec \binom{2n}{n}$. За да се убедим в това, правим следните еквивалентни преобразувания върху биномния коефициент, използвайки трикратно апроксимацията на Стирлинг: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\right)}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{e^n}\right)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{e^n}\right)} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$. След това $\binom{2n}{n} \prec (n!)^n$. За да се убедим в това, вземаме логаритмите на двете страни, които са съответно $\Theta(n)$ и $\Theta(n^2 \lg n)$. След това $(n!)^n \prec 2^{2^n}$, тъй като логаритмите на двете страни са съответно $\Theta(n^2 \lg n)$ и 2^n. И накрая, $2^{2^n} \prec n^{n!}$, което следва от вземането на логаритмите на двете страни и известния факт, че $2^n \prec n!$. □

Зад. 2 Решете следните рекурентни отношения чрез мастър теоремата (Master Theorem) или нейното разширение. В подзадача ж), $f(n)$ е функция, такава че $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + n$.

а) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^2$ б) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^4$ в) $T(n) = (4+\sqrt{15})T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^3$

г) $T(n) = 6T\left(\dfrac{n}{6}\right) + (\lg n)^2$ д) $T(n) = 8T\left(\dfrac{n}{12}\right) + n$ е) $T(n) = 7T\left(\dfrac{n}{7}\right) + (\lg n)^2 + \dfrac{\sqrt{n}}{\lg n}$

ж) $T(n) = 19T\left(\dfrac{n}{9}\right) + f(n)$ з) $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \dbinom{n}{2}$ и) $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^2 \lg n$

й) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{6}\right) + 7$ к) $T(n) = 11T\left(\dfrac{n}{\log_3 11}\right) + 1$ л) $T(n) = 7T\left(\dfrac{\sqrt[7]{7^6}\,n}{7}\right) + \underbrace{n(\lg n)^7 + \dfrac{n^7}{1+\sqrt[7]{n}}}_{h(n)}$

Решение:

а) $n^2 = \Omega(n^{1+\epsilon})$. За да е приложим случай 3, проверяваме условието за регулярност: $2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq cn^2 \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{2}$. Съгласно случай 3 на МТ, $T(n) = \Theta(n^2)$.

б) $n^4 = \Omega(n^{1+\epsilon})$. За да е приложим случай 3, проверяваме условието за регулярност: $2\left(\frac{n}{2}\right)^4 \leq cn^2 \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{8}$. Съгласно случай 3 на МТ, $T(n) = \Theta(n^4)$.

в) $\sqrt{15} < 4 \Rightarrow 4 + \sqrt{15} < 8 \Rightarrow \lg(4+\sqrt{15}) < 3 \Rightarrow n^3 = \Omega(n^{\lg(4+\sqrt{15})+\epsilon})$. За да е приложим случай 3, проверяваме условието за регулярност: $(4+\sqrt{15})\left(\frac{n}{2}\right)^3 \leq cn^3 \Leftrightarrow c \geq \frac{4+\sqrt{15}}{8}$. Съгласно случай 3 на МТ, $T(n) = \Theta(n^3)$.

г) Тъй като $(\lg n)^2 = O(n^{(\log_6 6)-\epsilon})$, $T(n) = \Theta(n)$ по случай 1 на МТ.

д) $n = \Omega(n^{(\log_{12} 8)+\epsilon})$. За да е приложим случай 3, проверяваме условието за регулярност: $8\left(\frac{n}{12}\right) \leq cn \Leftrightarrow c \geq \frac{2}{3}$. Съгласно случай 3 на МТ, $T(n) = \Theta(n)$.

е) Асимптотиката на $(\lg n)^2 + \frac{\sqrt{n}}{\lg n}$ се определя от $\frac{\sqrt{n}}{\lg n}$. Лесно се вижда, че $\frac{\sqrt{n}}{\lg n} = O(n^{(\log_7 7)-\epsilon})$. Тогава $T(n) = \Theta(n)$ по случай 1 на МТ.

ж) Дадено е, че $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + n$. Първо да определим асимптотичния растеж на $f(n)$ чрез МТ. Тъй като $n = \Theta(n^{\log_2 2})$, съгласно случай 2 на МТ имаме $f(n) = \Theta(n \lg n)$. Връщаме се към $T(n)$. Забележете, че за всяка функция $g(n)$, такава че $g(n) = \Theta(n \lg n)$ е вярно, че $g(n) = O(n^{(\log_9 19)-\epsilon})$, понеже $19 > 9 \Rightarrow \log_9 19 > 1$. Следва, че случай 1 на МТ е приложим и съгласно него, $T(n) = \Theta(n^{\log_9 19})$.

з) Тъй като $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, имаме $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$. Оттук следва, че $\binom{n}{2} = \Omega(n^{(\log_2 3)+\epsilon})$. За да е приложим случай 3, проверяваме условието за регулярност: $3\left(\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\right) \leq c\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow c \geq \frac{3}{4}\frac{n-2}{n-1}$. Очевидно всеки избор на $c \geq \frac{3}{4}$ удовлетворява условието за регулярност, така че, съгласно случай 3 на МТ, $T(n) = \Theta(n^2)$.

и) Тъй като $n^2 \lg n \neq O(n^{(\log_2 4)-\epsilon})$ и $n^2 \lg n \neq \Omega(n^{(\log_2 4)+\epsilon})$, нито случай 1, нито случай 3 на МТ са приложими. Случай 2 не е приложим, понеже $n^2 \lg n \neq \Theta(n^{\log_2 4})$. Но $n^2 \lg n = \Theta(n^{\log_2 4} \lg n)$, следователно разширението на МТ е приложимо и съгласно него, $T(n) = \Theta(n^{\log_2 4}(\lg n)^2)$.

й) Тъй като $7 = O(n^{(\log_6 5)-\epsilon})$, $T(n) = \Theta(n^{\log_6 5})$ по случай 1 на МТ.

к) $3^3 > 11 > 3^2 \Rightarrow 3 > \log_3 11 > 2$. Нека $\log_3 11 = k$. Отбелязваме, че $1 = O(n^{(\log_k 11)-\epsilon})$, така че $T(n) = \Theta(n^{\log_k 11})$ по случай 1 на МТ.

л) Условието е еквивалентно на $7T\left(\dfrac{n}{\sqrt[7]{7}}\right) + n(\lg n)^7 + \dfrac{n^7}{1+\sqrt[7]{n}}$. Асимптотиката на $h(n)$ се определя от $\dfrac{n^7}{1+\sqrt[7]{n}}$. Очевидно $h(n) = \Theta\left(n^{\frac{48}{7}}\right)$. Тъй като $\log_{\sqrt[7]{7}} 7 = 7$, сравняваме $h(n)$ с n^7 и забелязваме, че $h(n) = O(n^{7-\epsilon})$. Тогава $T(n) = \Theta(n^7)$ по случай 1 на МТ. $\square$

Зад. 3 Решете следните рекурентни отношения чрез метода с характеристичното уравнение.

а) $T(n) = 3T(n-1) + n$

б) $T(n) = 2T(n-1) + n^3$

в) $T(n) = 3T(n-1) + n\,(\log_{11} 17)^n$

г) $T(n) = 4T(n-2) + n\,(\log_{11} 17)^n + n^4$

д) $T(n) = 5T(n-1) + 6T(n-2) + 1$

е) $T(n) = 3T(n-1) - 3T(n-2) + T(n-3) + (\sqrt{2})^n$

ж) $T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2) + n^3$

з) $T(n) = 2T(n-1) + 2^n(1+n) + 2^n(1+\sqrt{2})$

Решение:

а) Корените на хар. у-ние са $\{3\}_M$, от нехомогенната част още $\{1\}_M$, общо $\{1,3\}_M$, оттук $T(n) = \Theta(3^n)$.

б) Корените на хар. у-ние са $\{2\}_M$, от нехомогенната част още $\{1,1,1,1\}_M$, общо $\{1,1,1,1,2\}_M$, оттук $T(n) = \Theta(2^n)$.

в) Корените на хар. у-ние са $\{3\}_M$, от нехомогенната част още $\{\log_{11} 17, \log_{11} 17\}_M$, общо $\{\log_{11} 17, \log_{11} 17, 3\}_M$. Тъй като $11^3 > 17 \Rightarrow 3 > \log_{11} 17$, оттук $T(n) = \Theta(3^n)$.

г) Корените на хар. у-ние са $\{2,-2\}_M$, от нехомогенната част още $\{\log_{11} 17, \log_{11} 17, 1,1,1,1,1\}_M$, общо $\{\log_{11} 17, \log_{11} 17, 1,1,1,1,1,2,-2\}_M$. Тъй като $11^2 > 17 \Rightarrow 2 > \log_{11} 17$, оттук $T(n) = \Theta(2^n)$.

д) Корените на хар. у-ние са $\{6,-1\}_M$, от нехомогенната част още $\{1\}_M$, общо $\{6,1,-1\}_M$. Оттук $T(n) = \Theta(6^n)$.

е) Корените на хар. у-ние са $\{1,1,1\}_M$, от нехомогенната част още $\{\sqrt{2}\}_M$, общо $\{1,1,1,\sqrt{2}\}_M$. Оттук $T(n) = \Theta(2^{\frac{n}{2}})$.

ж) Корените на хар. у-ние са $\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}_M$, от нехомогенната част още $\{1,1,1,1\}_M$, общо $\{1,1,1,1,2+\sqrt{7},2-\sqrt{7}\}_M$. Оттук $T(n) = \Theta((2+\sqrt{7})^n)$.

з) Преписваме условието така, че да бъде във вид, подходящ за метода с характеристичното уравнение: $T(n) = 2T(n-1) + 2^n(2+\sqrt{2}+n)$. Корените на хар. у-ние са $\{2\}_M$, от нехомогенната част още $\{2,2\}_M$, общо $\{2,2,2\}_M$. Оттук $T(n) = \Theta(n^2\,2^n)$. □

Зад. 4 Решете чрез развиване (итерация) $T(n) = n^2 T(\sqrt{n}) + n^4$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^2 T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + n^4 \\
&= n^2\left(n^1 T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + n^2\right) + n^4 = n^{2+1}\, T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + 2n^4 \\
&= n^{2+1}\ \left(n^{\frac{1}{2}} T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + n^1\right) + 2n^4 = n^{2+1+\frac{1}{2}}\ T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + 3n^4 = \\
&\dots \\
&= \left(\underbrace{n^{2+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-2}}}}_{A}\right) T\left(n^{\frac{1}{2^k}}\right) + \underbrace{kn^4}_{B}
\end{aligned}
$$

Да оценим сумата в степенния показател на A:

$$
2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}} = 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}\right)
$$

Известно е, че итераторът $n \to \sqrt{n}$ се изпълнява приблизително $\lg\lg n$ пъти, преди да достигне единицата или коя да е друга положителна константа, следователно $k_{\max} = \lg\lg n$. При $k = k_{\max}$:

1. $T\left(n^{\frac{1}{2^k}}\right) = T(\mathrm{const}) = \Theta(1)$,

2. $A = O(n^4)$,
3. $B = \Theta(n^4 \lg\lg n)$

Оттук следва, че $T(n) = \Theta(n^4 \lg\lg n)$. $\square$

Зад. 5 Докажете по индукция, че $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg\lg n$ има решение $T(n) = \Theta(\lg n)$.

Решение: Първо доказваме, че $T(n) = O(\lg n)$, тоест, $\exists c > 0 : T(n) \leq c \lg n$. Ако се опитаме да докажем формално именно това твърдение, получаваме:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2\frac{c}{2}\lg n + \lg\lg n \qquad \text{от инд. хипотеза, която е } T(\sqrt{n}) \leq c\lg\sqrt{n} = \frac{c}{2}\lg n \\
&= c\lg n + \lg\lg n \\
&\not\leq c\lg n \qquad \text{за никоя положителна константа } c \text{ при } n \to \infty
\end{aligned}$$

Засилваме твърдението така: $\exists b, c > 0 : T(n) \leq c\lg n - b\lg\lg n$. Тогава инд. хипотеза става $T(\sqrt{n}) \leq c\lg\sqrt{n} - b\lg\lg\sqrt{n} = \frac{c}{2}\lg n - b\lg\left(\frac{1}{2}\lg n\right) = \frac{c}{2}\lg n - b\lg\lg n + b$. Имаме

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2\left(\frac{c}{2}\lg n - b\lg\lg n + b\right) + \lg\lg n \\
&= c\lg n - 2b\lg\lg n + 2b + \lg\lg n = c\lg n - b\lg\lg n - b\lg\lg n + 2b + \lg\lg n \\
&\leq c\lg n - b\lg\lg n \qquad \text{когато } -b\lg\lg n + 2b + \lg\lg n \leq 0
\end{aligned}$$

За да гарантираме $-b\lg\lg n + 2b + \lg\lg n \leq 0$ при $n \to \infty$, достатъчно е $b > 1$.

Сега ще докажем, че $T(n) = \Omega(\lg n)$, тоест, $\exists d > 0 : T(n) \geq d\lg n$. Индукционната хипотеза е, че $T(\sqrt{n}) \geq d\lg\sqrt{n} = \frac{d}{2}\lg n$. Прилагайки я към дефиницията на $T(n)$, получаваме $T(n) \geq 2\frac{d}{2}\lg n + \lg\lg n = d\lg n + \lg\lg n \geq d\lg n$ за всяко $d > 0$ при $n \to \infty$.

$\square$

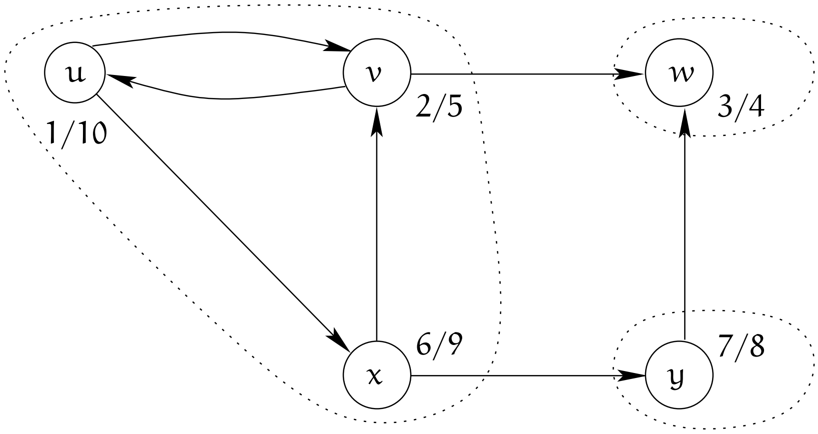
Зад. 6 Докажете или опровергайте следното твърдение. За всеки ориентиран граф G с поне два силно свързани компонента, за всеки два различни силно свързани компонента $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ на G, точно едно от следните две твърдения е в сила след произволно изпълнение на обхождане в дълбочина (DFS):

1. $\forall x \in V', \forall y \in V'' : \; f[x] < f[y]$
2. $\forall x \in V', \forall y \in V'' : \; f[y] < f[x]$

Решение: Твърдението не е вярно. Фигура 1 показва контрапример.

$\square$

Зад. 7 Намерете асимптотичната времева сложност на алгоритмите, представени със следните фрагменти, като функция на n. В подзадача а) приемете, първо, че A е масив с достатъчна големина, който е инициализиран извън дадения сегмент, второ, че `Heapsort(A,i,j)` вика познатия Ви Heapsort върху подмасива $A[i \ldots j]$ и трето, че `p1(A,i,j)` е функция, работеща върху $A[i \ldots j]$ във време $\Theta(1)$, която функция може да променя (няма значение как) елементи от този подмасив.



Фигура 1: Контрапример за **Зад. 6**: $f[v] < f[y] < f[x]$.

а)
```
int A[MAXINT];

int main() {
   return p(1, n);}

int p(int i, int j)
 {
 int mid, a, b;
 if (j > i) {
  Heapsort(A,i,j);
  p1(A,i,j);
  mid = (j + i) / 2;
  a = p(i, mid);
  b = p(mid + 1, j);
  return a+b; }
 return 1; }
```

б)
```
int main() { r(1, n, n*n); }

void r(int a, int b, int c) {
 int k;
 if (a + b + c > a + b + 1) {
  for(k = 1; k < a+b+c; k = (k<<2) - 1)
   {
   if (k % 3 == 0) break;
   r(a, b, c-1);}
  for(k = 1; k < a+b+c; k <<= a+b+c)
   r(a, b, c-1); } }
```

в)
```
 t = s = 1;
 for(i = 1; i < n; i *= 2)
  s++;
 for(i = s; i > 0; i--)
  for(j = s; j > i; j--)
   t++;
```

Решение:

а) Известно е, че Heapsort работи във време $\Theta(m \lg m)$ в най-лошия случай, където m е големината на масива. Налага се да допуснем най-лошия случай, тъй като не знаем как работи функцията `p1`, следователно не можем да правим никакви допускания за подмасивите `A[i...mid]` и `A[mid+1...j]` – примерно, дали са сортирани или не[†]. Сложността по време на фрагмента се описва от рекурентното отношение $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \lg n)$. Съгласно разширението на мастър теоремата, $T(n) = \Theta(n \lg^2 n)$.

б) Параметърът, който определя рекурсивните викания, е третият – първият и вторият параметри са без значение за това, докога се изпълнява рекурсията. Първият `for` цикъл се изпълнява точно два пъти, понеже след първото му изпълнение k става $4 - 1 = 3$, така че условието `k % 3 == 0` на второто изпълнение на този `for` е вярно и второ викане на функцията `r()` няма. Вторият `for` се изпълнява само един път, понеже $2^{a+b+c} > a + b + c$. Следователно, има общо две викания на `r()`, всяко със стойност на управляващия параметър с единица по-малка. Сложността се описва с рекурентното отношение $T(m) = 2T(m-1) + 1$, чието решение

[†]Всъщност, Heapsort работи в $\Theta(m \lg m)$ и в най-добрия случай, така че не е задължително да се ползва `p1`, но не сме разглеждали най-добрата сложност по време.

е $\mathsf{T}(m) = \Theta(2^m)$. Забележете, че началното m не е n, а n^2. Следователно сложността по време като функция на n е $\Theta\left(2^{n^2}\right)$.

в) Редът `t++` се изпълнява $\Theta(s^2)$ пъти спрямо стойността на `s`, която се получава от първия цикъл `for`. На свой ред, тази стойност е $\Theta(\lg n)$. Следователно, общата сложност на сегмента е $\Theta(\lg n + \lg^2 n) = \Theta(\lg^2 n)$.

□