Деф. Ще казваме, че f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицателна, ако $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено f(n)≥0

Деф. Ще казваме, че f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна, ако $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено f(n)>0

Деф. Нека g е ас. неотр. ф-я. Въвеждаме сл. кл. от функции:

-O(g) = { f - ас. неотр. | ∃c>0 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено 0≤f(n)≤c*g(n) }

-o(g) = { f - ас. неотр. | ∀c>0 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено 0≤f(n)≤c*g(n) }

-Ω(g) = { f - ас. неотр. | ∃c>0 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено 0≤c*g(n)≤f(n) }

-ω(g) = { f - ас. неотр. | ∀c>0 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено 0≤c*g(n)≤f(n) }

-θ(g) = { f - ас. неотр. | $\exists c_1,\ c_2>0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c_1*g(n) \leq f(n) \leq c_2*g(n)$ }

Озн.

-f∈O(g) ≡ f=O(g) ≡ f $\preccurlyeq$ g

-f∈o(g) ≡ f=o(g) ≡ f $\prec$ g

-f∈Ω(g) ≡ f=Ω(g) ≡ f $\succcurlyeq$ g

-f∈ω(g) ≡ f=ω(g) ≡ f $\succ$ g

-f∈θ(g) ≡ f=θ(g) ≡ f $\asymp$ g

Свойства

1. fσg & gσh ⇒ fσh, $\sigma \in \{\asymp, \preccurlyeq, \prec, \succcurlyeq, \succ\}$
2. fσf, $\sigma \in \{\asymp, \preccurlyeq, \succcurlyeq\}$
3. f $\succcurlyeq$ g & g $\succcurlyeq$ f ⇒ f $\asymp$ g
4. f $\asymp$ g ⇔ g $\asymp$ f
5. f $\succcurlyeq$ g ⇔ g $\preccurlyeq$ f и f $\succ$ g ⇔ g $\prec$ f
6. max{f, g} $\asymp$ f+g

$0 \leq \frac{f(n)+g(n)}{2} \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n)+g(n)$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=0$ ⇔ f=o(g)

$\forall \epsilon>0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0\ |\frac{f(n)}{g(n)}|<\epsilon \quad -\epsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq \epsilon \quad -\epsilon*g(n) \leq 0 \leq f(n) \leq \epsilon*g(n)$

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=c>0 \Rightarrow f=\theta(g)$

f(n) = (2+sin(n))n и g(n)=n g=θ(f) $\neg\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=c>0$

9. Нека a>1, a∈$\mathbb{R}$. Нека g(n) не е ограничена отгоре. Тогава имаме:

9.1 f $\prec$ g ⇒ $a^{f(n)} \prec a^{g(n)}$

9.2 $\log_a f(n) \prec \log_a g(n) \Rightarrow$ f $\prec$ g

10. ∀a>1 ∀t,ϵ>0 е изпълнено $\log_a^t n \prec n^\epsilon$

Зад. 1

Нека p(x) = $a_0 x^k + \ldots + a_k$. Тогава да се докаже, че p(n) $\asymp n^k$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k+\ldots+a_k}{n^k} = a_0 > 0 \Rightarrow p(n) = \theta(n^k)$

Зад. 2

Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Тогава да се докаже, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k} / n^k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\text{nn}\ldots n} = \frac{1}{k!}>0 \Rightarrow \binom{n}{k} \asymp n^k$

Зад. 3

Докажете, че $(n+1)^n \asymp n^n$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 0 \Rightarrow (n+1)^n \asymp n^n$

Зад. 4

g(n)=n

$f(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ n^2, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

Да се док., че са ас. несравними.

Ще ползваме, че f≠O(g) & g≠O(f) ⇒ ас. несравними.

Доп., че f=O(g) ⇒ ∃c>0 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено 0≤f(n)≤c*g(n), но това очевидно не е вярно за нечетни n т.е f≠O(g).

Аналог. g=O(f) ... четни

Зад. 5

Да се док., че f=O(g) ¬⇒ f=o(g) ∨ f=θ(g) т.е че е изп. f $\preccurlyeq$ g ¬⇒ f $\prec$ g ∨ f $\asymp$ g

g(n)=n

$f(n) = \begin{cases} n, & \text{четно} \\ \frac{1}{n}, & \text{нечетно} \end{cases}$

За вкъщи...

Зад. 6

Да се наредят, сортирани спрямо $\preccurlyeq$ следните функции:

$n^3,\ \sqrt{n},\ \log(n),\ \log^2(n),\ \log^{(2)}(n),\ n!,\ a^n,\ a,\ n^n,\ \frac{1}{n^2},\ n^2,\ n^{\log(n)}$, където a>1

Подсказка: log(n!) = nlog(n)