$\sum_{i=1}^{n} 1 = n = \Theta(n)$
$\sum_{i=st}^{n} 1 = n - st + 1 = \Theta(n)$
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$

Интегрален критерий:

Нека f(x) е полож. ас. ф-я. Нека $n_0 : \forall x \geq n_0$ е изп. $f(x) > 0$. Тогава $\forall x \geq n_0$ е изп. $\sum_{i=1}^{x} f(i) \asymp \int_1^x f(t)\,dt$.

При какви условия мож да го ползваме?

$\exists$m, M>0 $\forall x \geq n_0$ $m * f(x) \leq \min_{y \in [x, x+1]} f(y) \leq \max_{y \in [x, x+1]} f(y) \leq M * f(x)$

Пр. 1:

$f(x) = x^2$

Нека m=1, M=4. Тогава:

$\forall x \geq n_0 = 1 \quad 1 * x^2 \leq \min_{y \in [x, x+1]} y^2 \leq \max_{y \in [x, x+1]} y^2 \leq 4 * x^2$

$\forall x \geq 1 \; x^2 \leq x^2 \leq (x+1)^2 \leq 4\,x^2$

Значи инт. кр. е в сила и $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \theta\left(\int_1^n x^2\,dx\right) = \theta\left(n^3\right)$

Пр. 2:

$f(x) = x^x$ $\exists$m=1 $\nexists$M

Извод:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \Theta\left(\int_1^n x^{\alpha}\,dx\right) = \begin{cases} \theta\left(n^{\alpha+1}\right), & \alpha > -1 \\ \theta(\log(n)), & \alpha = -1 \\ \theta(1), & \alpha < -1 \end{cases}$$

Зад. 1

```
1. for i←1 to n
2.         print ‘a’
```

$\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \Theta(n)$

Зад. 2

```
1. for i←1 to n
2.         for j←1 to n
3.                 print ‘a’
```

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n \sum_{i=1}^{n} 1 = n * n = n^2 = \Theta(n^2)$

Зад. 3

```
1. for i←1 to n
2.         for j←1 to i
3.                 print ‘a’
```

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$

Зад. 4

1. for i←1 to n
2. for j←1 to n with step=i
3. print ‘a’

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\ j=j+i}^{n} 1 \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(n * \log(n))$

Зад. 5

1. for i←1 to n
2. for j←i to 2^i
3. if j<n then
4. for k←1 to n with step=i
5. print ‘a’
6. print ‘b’

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{2^i} 1}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \sum_{k=1,\ k=k+i}^{n} 1}_{(2)} + \underbrace{\sum_{i=\log(n)}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1,\ k=k+i}^{n} 1}_{(3)}$

(1) = $\sum_{i=1}^{n} (2^i - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$

(1.1)

2^x – асимптотинчо положителна

Нека m=1 M=2. Тогава имаме:

$\forall x \geq 1\ 1 * 2^x \leq \min_{y \in [x, x+1]} 2^y \leq \max_{y \in [x, x+1]} 2^y \leq 2 * 2^x$

⇒ може да изп. инт. кр.

$\sum_{i=1}^{n} 2^i = \Theta\left(\int_1^n 2^x \, dx\right) = \theta$

$\int_1^n e^{x \ln 2} \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n e^{x \ln 2} \, d(x \ln 2) = \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} \Big|_1^n = \frac{2^n - 2}{\ln 2} = \theta(2^n)$

(1.2) = $\theta(n^2)$

(1.3) = $\theta(n)$

⇒ (1) = $\theta(2^n)$

(2) = $\sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \frac{n}{i} =$

$\sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{n}{i} (2^i - i + 1) = \sum_{i=1}^{\log(n)} \left(\frac{n 2^i}{i} - n + \frac{n}{i}\right) \approx n \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{2^i}{i} - n \log(n) + n \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{1}{i}$

(2.1) = $O\left(n \sum_{i=1}^{\log(n)} 2^i\right) = O\left(n 2^{\log(n)}\right) = O(n * n) = O(n^2)$

(2.2) = $\theta(n * \log(n))$

(2.3) = $\theta(n * \log(\log(n)))$

⇒ (2) = $O(n^2)$

(3) = $O\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1,\ k=k+i}^{n} 1\right) = \ldots = O(n^2 * \log(n))$

⇒ (*) = $\theta(2^n)$

Зад. 6

1. Alg6(A[1..n])
2. for i←1 to n-1

```
3.          for j←i+1 to n
4.                  if A[i]=A[j] then
5.                          return true
6.      return false
```

Alg6 твърдим, че разпознава дали в масива A[1..n] има 2 еднакви елемента.

Вътрешна инварианта: При достигане за k-ти път на ред 3. имаме, че ел. A[i+1], …, A[i+k-1] са ≠ A[i]

Външна инварианта: При достигане за k-ти път на ред 2. имаме, че ел A[1], ..., A[k-1] са уникални спрямо A[1..n]
// По формално: $\forall p \in \{1, \ldots, k-1\}$ $\forall q \in \{p+1, \ldots, n\}$ е изп. $A[p] \neq A[q]$, но релацията = над $\mathbb{N}$ е симетрична $\Rightarrow$ A[1], …, A[k-1] са уникални спярмо A[1..n]