Заб.
Рекурентните уравнения които ще разглеждаме ще са със строго намаляващ параметър.
Също така ще считаме, че ако рек. уравнение е базов случай, то то е със сложност $\theta(1)$.

Зад. 1
$T(n) = 4T(n-2) + n2^n + 4.3^n$

1) Хомогенна част
$T(n) = 4T(n-2)$
$x^2 = 4 \rightarrow \{2, -2\}_M$

2) Нехомогенна част
$\{2, 2, 3\}_M$

Обединяваме: $\{-2, 2, 2, 2, 3\}_M$

$T(n) = c_1(-2)^n + c_2\, 2^n + c_3\, n2^n + c_4\, n^2\, 2^n + c_5\, 3^n = \theta(3^n),\ \ c_5 > 0$

Зад. 2
$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$
$x^2 = 2x - 1$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x_1 = x_2 = 1 \rightarrow \{1,\ 1\}_M$
$T(n) = c_1\, 1^n + c_2\, n1^n = \theta(n)$

Зад. 3
$T(n) = T(n-1) + n$
$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n = T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n = \ldots = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + (k+1) + T(k)$

Разбираме се, че когато решаваме задачи чрез разписване k=0 (или 1.. някакво малко число за лесни сметки).

$T(n) = n + (n-1) + \ldots + 1 + T(0)$
От горното придобиваме интуиция, че $T(n) = \theta(n^2)$

Ще докажем, че $T(n) = O(n^2)$ & $T(n) = \Omega(n^2)$.
1) $T(n) = O(n^2)$
ИП: $\exists c>0\ \forall m<n$ е изп. $T(m) \leq cm^2$
ИС: ? $T(n) \leq cn^2$?
$T(n) = T(n-1) + n \leq c(n-1)^2 + n = cn^2 - 2cn + c + n = cn^2 - (2c-1)n + c \leq cn^2$
т.е имаме $cn^2 - (2c-1)n + c \leq cn^2$
$(2c-1)n - c \geq 0$
При c=1 и $n_0 = 1$ горното е изпълнено.

2) $T(n) = \Omega(n^2)$

ИП: $\exists$d>0 $\forall$m<n е изп. $T(m) \geq \mathrm{dm}^2$

ИС: ? $\mathrm{T(n)} \geq \mathrm{dn}^2$?

$T(n) = T(n-1) + n \geq d(n-1)^2 + n = \mathrm{dn}^2 - (2d-1)n + d \geq \mathrm{dn}^2$

т.е (2d-1)n - d ≤ 0

При $d = \frac{1}{4}$ и $n_0 = 1$ горното е изпълнено.

Зад. 4

$\mathrm{T(n)} = \mathrm{T(n-1)} + \frac{1}{n}$

$\mathrm{T(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1} + T(0)$

Придобиваме интуиция, че $\mathrm{T(n)} = \theta(\log(n))$

…доказваме с индукция

Зад. 5

$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{T(n-1)} + \frac{1}{n}$

$\mathrm{T(n)} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2} + \frac{8}{n-3} + \frac{16}{n-4} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{1} + 2^n T(0)$

$\mathrm{T(n)} = 2^n T(0) + 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^{n-i}} = ? = \theta(2^n)$

$2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^{n-i}} \leq 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i}} = 2^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 2^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2^{n+1} = 2.2^n$

$\mathrm{T(n)} = \theta(2^n) + O(2^n) = \theta(2^n)$

…доказваме с индукция

Зад. 6

$\mathrm{T(n)} = \frac{n}{n+1} T(n-1) + 1$

$\mathrm{T(n)} = \frac{n}{n+1} T(n-1) + 1 =$

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n-1}{n} T(n-2) + 1\right) + 1 = \frac{n-1}{n+1} T(n-2) + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} + \ldots + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} T(0)$$

$\mathrm{T(n)} = \frac{T(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} i = \frac{T(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)(n+2)-1}{2} = \theta(\mathrm{n})$

…доказваме с индукция

Зад. 7

T(n) = T(n-2) + T(n-4) + … + T(n%2) //неформално

T(n+2) = T(n) + T(n-2) + T(n-4) + … + T(n%2) = T(n) + T(n) = 2T(n)

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}_M$

$T(n)\, c_1\left(-\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(\sqrt{2}\right)^n = \theta\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)$

Зад. 8

1. A(n)
2. s←0
3. for i←1 to n-1

4. s←s+2A(i)+1
5. return s

T(n) = T(n-1) + T(n-2) + … + T(1) = $\theta(2^n)$

1. B(n)
2. s←0
3. for i←1 to n-1
4. s←s+B(i)+B(i)+1
5. return s

T(n) = 2(T(n-1) + T(n-2) + … + T(1))

Зад. 9

T(n) = $2\,T\left(\sqrt{n}\right)$+1

Пол. $n = 2^{2^m}$ т.е m=log(log(n))

Нека $S(m) := T\left(2^{2^m}\right)$

Имаме $S\,(m) = T\left(2^{2^m}\right) = 2\,T\left(2^{\frac{2^m}{2}}\right) + 1 = 2\,T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 1 = 2\,S(m-1) + 1$

Решаваме за S(m) = 2S(m-1) + 1 = … = $\theta(2^m)$ = $\theta\left(2^{\log(\log(n))}\right) = \theta(\log(n)) = T(n)$

Заб. Разбрира се n може да не може да се разложи точно на 2^{2^m}. Ще покажем, че за m_1 = floor(log(log(n))) и за m_2 = ceil(log(log(n))) излиза същото. Най-грубо казано.. ограничаваме го от ляво и от дясно все със θ(log(n)).. т.е излиза, че за всяко n имаме θ(log(n)).

Зад. 10

T(n) = $T\left(\sqrt{n}\right)$ + 1

Пол. $n = 2^{2^m}$ т.е m = log(log(n))

Нека S(m) := $T\left(2^{2^m}\right)$

Имаме $S\,(m) = T\left(2^{2^m}\right) = T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 1 = S(m-1) + 1 = \theta(m) = \theta(\log(\log(n))) = T(n)$

Зад. 11 (ВАЖНО)

T(n) = 2T(n-1) + T(log(n)) + n =?= $\theta(2^n)$

1) T(n) =?= $O(2^n)$

Пъви опит:

ИП: ∃c>0 ∀m<n $T\,(m) \leq c2^m$

ИС: ?T(n) ≤ $c2^n$?

T(n) = 2T(n-1) + T(log(n)) + n ≤ $2\,c2^{n-1} + c2^{\log(n)} + n = c2^n + cn + n \leq c2^n$

т.е имаме cn+n≤0

...няма такова c>0 и n_0 такива, че горното да е изпълнено... ще трябва да засилим индукционното предположение.

Втори опит:
ИП: $\exists$c,d>0 $\forall$m<n $T(m) \leq c2^m - d$
ИС: ?$T(n) \leq c2^n - d$?
…

Трети опит: (не съм тествал, може и да сработи)
ИП: $\exists$c, d>0 $\forall$m<n $T(m) \leq c2^m - dm$
…

Четвърти опит: (ако горното е сработило, това разбира се е ненужно)
ИП: $\exists$c, d>0 $\forall$m<n $T(m) \leq c2^m - d\alpha^m,\ \alpha \in (1,\ 2)$
ИС: ?$T(n) \leq c2^n - d\alpha^n$?
$T(n) = 2T(n-1) + T(\log(n)) + n \leq 2\left(c2^{n-1} - d\alpha^{n-1}\right) + \left(c2^{\log(n)} - d\alpha^{\log(n)}\right) + n \leq c2^n - d\alpha^n$
$2\left(-d\alpha^{n-1}\right) + \left(c2^{\log(n)} - d\alpha^{\log(n)}\right) + n \leq -d\alpha^n$
$d\alpha^n - 2\,d\alpha^{n-1} + cn - d\alpha^{\log(n)} + n \leq 0$
В горното неравенство първите 2 са експоненциални, а последните 3 са линейни (грубо казано). Тоест ще имаме n_0 спрямо което от горното неравенство само първите 2 ще са значещи.. записваме си само тях.
$d\alpha^n - 2\,d\alpha^{n-1} \leq 0$
$d\alpha\alpha^{n-1} \leq d2\alpha^{n-1}$
$d\alpha \leq 2d$ - което е вярно за всяко d
Тоест имаме n_0 спрямо което за всяко c>0 и за всяко d>0 неравенството е изпълнено $\Rightarrow$ T(n) = $O(2^n)$

2) T(n) =?= $\Omega(2^n)$
ИП: $\exists$c>0 $\forall$m<n $T(m) \geq c2^m$
ИС: $T(n) = 2T(n-1) + T(\log(n)) + n \geq 2\,c2^{n-1} + c2^{\log(n)} + n = c2^n + cn + n \geq c2^n$
Очевидно е вярно за всяко c>0 и $n_0 \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow T(n) = \theta(2^n)$