Th (Master)

Нека a≥1, b>1 и f(n) - положителна ф-я. Тогава за T(n) = $a.T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ имаме:

1. Ако $f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$, то T(n) = $\theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, $\epsilon>0$
2. Ако $f(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, то T(n) = $\theta\left(n^{\log_b(a)}\log(n)\right)$
3. Ако $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)$ и ∃c∈(0, 1) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$: $a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)$, то T(n) = θ(f(n)), $\epsilon>0$

Заб. 2-рата част на 3. се нарича условие за регулярност

Зад. 1

T(n) = 4 $T\left(\frac{n}{2}\right)$+n

a=4

b=2

f(n)=n

$\log_b(a) = \log_2(4) = 2$

$f(n) = n = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right) = O\left(n^{2-0.1}\right)$=O($n^{1.9}$)

Тоест от MT1 ⇒ T(n) = $\theta\left(n^2\right)$

Зад. 2

T(n) = 4 $T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$

a=4

$b = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$f(n) = n^3$

$\log_b(a) = \log_{2^{1/2}}(4) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2(4) = 2*2 = 4$

$f(n) = n^3 = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right) = O\left(n^{4-0.1}\right) = O\left(n^{3.9}\right)$

Тоест от MT1 ⇒ T(n) = $\theta\left(n^4\right)$

Зад. 3

T(n) = $T\left(\frac{n}{2}\right)$ + 1

a=1

b=2

f(n)≡1

$\log_b(a) = 0$

f(n) ≡ 1 = $\theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$ = $\theta\left(n^0\right)$ = $\theta(1)$

Тогава от MT2 ⇒ T(n) = $\theta\left(n^0\log(n)\right) = \theta(\log(n))$

Зад. 4

T(n) = 2 $T\left(\frac{n}{8}\right)$ + n

a=2

b=8

f(n)=n

$\log_b(a)$ = $\log_{2^3}(2)$ = $\frac{1}{3}\log_2(2)$ = $\frac{1}{3}$

f(n) = n = $\Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right) = \Omega\left(n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right) = \Omega\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = \Omega\left(\sqrt{n}\right)$

$a.f\left(\frac{n}{b}\right) = 2\, f\left(\frac{n}{8}\right) = 2\,\frac{n}{8} = \frac{n}{4}$

c such that: a.f($\frac{n}{b}$) ≤ c.f(n)

$\frac{n}{4}$ ≤ c.n

Тоест за $c = \frac{1}{4}$ горното неравенство е изпълнено $\forall\, n \geq n_0 = 0$

И така от MT3 ⇒ T(n) = θ(n)

Зад. 5

T(n) = 4 $T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \sqrt{n}$

a=4

b=2

$f(n) = n^2 \sqrt{n} = n^{\frac{5}{2}}$

$\log_b(a) = 2$

c such that: $a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)$

$4\, f\left(\frac{n}{2}\right) = 4\,\frac{n^2 \sqrt{n}}{2^2 \sqrt{2}} = \frac{n^2 \sqrt{n}}{\sqrt{2}} \leq$ cn$^2 \sqrt{n}$

Тоест за c = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ горното неравенство е изпълнено $\forall\, n \geq n_0 = 0$

И така от MT3 ⇒ T(n) = $\theta\left(n^2 \sqrt{n}\right)$

Разширение на Мастър теоремата

Нека a≥1, b>1 и f(n) - положителна. Тогава за $T(n) = a.T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ имаме:

4. Ако f(n) = $\theta\left(n^{\log_b(a)} \log^t(n)\right)$, то T(n) = $\theta\left(n^{\log_b(a)} \log^{t+1}(n)\right)$, t≥0

Зад. 6

T(n) = 2 $T\left(\frac{n}{4}\right)$ + 2 $\sqrt{n}\, \log^3(n)$

a=2

b=4

$f(n) = 2\sqrt{n}\, \log^3(n)$

$\log_b(a) = \frac{1}{2}$

f(n) = 2 $\sqrt{n}\, \log^3(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log^3(n)\right) = \theta\left(\sqrt{n}\, \log^3(n)\right)$

Тогава от разширението на мастър теоремата MT4 ⇒ $T(n) = \theta\left(\sqrt{n}\, \log^{3+1}(n)\right) = \theta\left(\sqrt{n}\, \log^4(n)\right)$

Зад. 7

T(n) = $T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\log(n)}$

a=1

b=2

f(n) = $\frac{1}{\log(n)}$

$\log_b$(a)=0

Мастър теоремата не помага за това рекурентно. Също така не помага и разширението ѝ.

Пол. $n = 2^m$, m=log(n)

Нека S(m) := $T(2^m) = T\left(2^{m-1}\right) + \frac{1}{\log(2^m)} = T\left(2^{m-1}\right) + \frac{1}{m} = S(m-1) + \frac{1}{m}$

⇒S(m)=θ(log(m))=θ(log(log(n)))=T(n)

Th (Akra-Bazzi)

Нека T(n) = $\begin{cases} \theta(1) & , 1 \leq n \leq c \\ a_1\, T(b_1\, n) + \ldots + a_k\, T(b_k\, n) + g(n), & n > c \end{cases}$, където:

1. n≥1, n∈ℝ
2. c - const such that: ∀i∈{1, …, k} е изп. $c \geq \frac{1}{b_i}$ & $c \geq \frac{1}{1-b_i}$
3. $a_i > 0$
4. $b_i \in (0,\ 1)$
5. $k \in \mathbb{N}^+$
6. g(n) - неотр. ф-я: удволетворява условието за полиномиално нарастване... т.е g(n) не е NP (т.е не е n!, n^n и тем подобни)
7. p е единствено такова число, че уволетворява $\sum_{i=1}^{k} a_i\, b_i{}^p = 1$

Тогава:

$T(n) = \theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{g(t)}{t^{p+1}}\, dt\right)\right)$

Зад. 8

$T(n) = \frac{1}{4}\, T\left(\frac{1}{4}\, n\right) + \frac{3}{4}\, T\left(\frac{1}{2}\, n\right) + 1$

1. няма какво да го гледаме изобщо
2. c≥4
3. вярно
4. вярно
5. очевидно
6. вярно е
7. p such that: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^p + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^p = 1$

Очевидно за p=0 горното е изпълнено.

Тогава от Akra-Bazzi ⇒ $T(n) = \theta\left(n^0\left(1 + \int_1^n \frac{1}{t^{0+1}}\, dt\right)\right) = \theta\left(1 + \int_1^n \frac{1}{t}\, dt\right) = \theta(1 + \log(n)) = \theta(\log(n))$

Решаване на рекурентни уравнения чрез дърво на извод на T(n):

Зад. 9

$T(n) = T\left(\frac{n}{6}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Дървото на извод на T(n): най-левия клон 1-ви ще стигне до лист.. защото намалява най-бързо n там. Тоест може да кажем, че дървото е пълно до това ниво. Това ниво съответно е $\log_6(n)$. Тоест имаме пълно дърво до ниво $\log_6(n)$.

С индукция доказваме, че всяко ниво, сумата на node-овете е точно n (т.е върши n работа) ⇒ имаме, че T(n) = $\Omega(n\log_6(n)) = \Omega(n\log(n))$.

Ще док. че T(n)=O(nlog(n)).

ИП: ∃c>0 ∀m<n е изп. T(m)≤c.m.log(m)

ИС:

$T(n) \leq \frac{cn}{6}\log\left(\frac{n}{6}\right) + \frac{cn}{3}\log\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{cn}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right) + n = cn\log(n) - cn\left(\frac{\log(6)}{6} + \frac{\log(3)}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right) \leq cn\log(n)$

Тоест за c=2 горното е изп. $\forall\, n \geq n_0 = 0$

⇒T(n) = O(nlog(n))

⇒T(n) = θ(nlog(n))