$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x = 1 \\ 2y, & x = 2 \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor, y\right), & x > 2 \ \& \ x \equiv 0 \pmod 2 \\ y + 2f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor, y\right), & \text{else} \end{cases}$$

$$(\forall x \in \mathbb{N}^+)\underbrace{(\forall y \in \mathbb{N}^+)[f(x,y) = x+y]}_{P(x)}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+)\Big[(\forall m \in \mathbb{N}^+)[\overbrace{m < n}^{F} \Longrightarrow P(m)] \Longrightarrow P(n)\Big]$$

$$\Longrightarrow \underline{(\forall n \in \mathbb{N}^+)\, P(n)}$$

Нека $n \in \mathbb{N}^+$.

Нека за всяко $\overset{k}{m} \in \mathbb{N}^{+}$ е в сила, че ако $\overset{k}{m} < n$, то $P(\overset{k}{m})$ е истина. | Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Тогава^{m} са

Възможни 4 случая.

$n=1$ ✓

Сл. 1 $n=1$. Тогава $f(n,m) \simeq m = 1.m = n.m$

$n=2$

Сл 2 $n=2$. Тогава $f(n,m) \simeq f(2,m) \simeq 2m = n.m$ ✓

Сл. 3. $n \geq 2$ & $n \equiv 0 \pmod{2}$. Тогава $f(n,m) \simeq$

$$2\cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor, m\right) \overset{n\equiv 0 \pmod 2}{=} 2f\left(\frac{n}{2}, m\right) \underset{P\left(\frac{n}{2}\right)}{\overset{\frac{n}{2}<n}{=}} \cancel{2}\left(\frac{n}{\cancel{2}}\cdot m\right) = n\cdot m \checkmark$$

Сл. 4. $n>2$ & $n\equiv 1 \pmod 2$. Тогава $f(n,m) \simeq 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor, m\right)+m$. Нека $\underbrace{l\in\mathbb{N}^+}$ и е т.ч. $n=2l+1$.

Тогава $f(n,m)\simeq 2f\left(\left\lfloor\frac{2l+1}{2}\right\rfloor, m\right)+m = 2f(l,m)+m$

$$\underset{P(l)}{\overset{l<n}{=}} 2(l\cdot m)+m = (2l+1)\cdot m = n\cdot m \checkmark.$$

Така във всеки сл. $f(n,m)=n.m.$

Понеже m беше произволно, то следва, че

$(\forall m \in \mathbb{N}^+)[f(n,m) = n \cdot m]$, тоест $P(n)$ е истина

Но понеже n беше произволно, то е в сила

$(\forall n \in \mathbb{N}^+)[(\forall m \in \mathbb{N}^+)[m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)]$.

От правилото за инд. следва, че

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+) \underbrace{P(n)}_{(\forall m \in \mathbb{N}^+)[f(n,m) = n \cdot m]}.$$

$$g(x,y,z) \simeq \begin{cases} x+y & , \text{else } ((x=0 \vee y=0) \,\&\, z=0) \\ 2+g(x-1,y-1,0) & , x\neq 0 \,\&\, y\neq 0, (z=0) \\ x+y+g(x,y,z-1) & , z>0 \end{cases}$$

$$(\forall z\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{N})(\forall y\in\mathbb{N})[g(x,y,z)\simeq(z+1)(x+y)]$$

$$R_{\cancel{y},z}(y)$$

3 индукции $Q_z^x(y)$ $P(z)$

$$g(x,y,0) \longrightarrow \cancel{\min(x,y)} \cdot 2 + \left(x - \cancel{\min(x,y)} + y - \cancel{\min(x,y)}\right)$$

$$x + y$$

$$g(x,y,z) \xrightarrow{z>0} g(x,y,0) + (x+y)z \longrightarrow$$

$$x + y + z(x+y) \longrightarrow$$

$$(z+1)(x+y).$$

Фундирано м-во

Деф. Нека W е м-во и нека $\underset{w}{<}$ е бин. рел. в м-вото W. Казваме, че $\langle W, \underset{w}{<} \rangle$ е фундирано м-во, ако:

1) $\underset{w}{<}$ е иррефлексо
2) $\underset{w}{<}$ е антисимет.
3) $\underset{w}{<}$ е транзитивна
4) $(\forall M \in \mathcal{P}(W))[\underbrace{M \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists m \in M) \neg (\exists x \in M)[x \underset{w}{<} m]}_{\text{всяко непразно подм-во на } W \text{ има мин. ел. отн. } \underset{w}{<}}]$

Правило за индукцията: Нека $\langle W, < \rangle$ е ф.н.м. Нека P е пред. над W. Тогава в сила е.

$$(\forall x \in W)\underbrace{[(\forall y \in W)[y < x \Longrightarrow P(y)]]}_{\text{и.х}} \Longrightarrow (\forall x \in W)P(x).$$

Лекс. произведение на фунд. м-ва е фунд.

(синтез) Нека $\langle A, <_A \rangle$ и $\langle B, <_B \rangle$ са ок-тави. Тогава $\langle A \times B, < \rangle$ е лех. произв. на $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$, ако

$\langle a, b\rangle \prec \langle x, y\rangle \iff a<x \vee (a=x \ \& \ b<y).$

$\curlywedge \iff b<y \vee (b=y \ \& \ a<x)$

$\langle \mathbb{N}, < \rangle$

$\langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sqsubset \rangle$ е ЧЛ, М, ако

$\langle a, b, c\rangle \sqsubset \langle x, y, z\rangle \iff$

$c<z \vee (c=z \ \& \ b<y) \vee (c=z \ \& \ b=y \ \& \ a<x)$

$$(\forall \langle x, y, z\rangle \in \mathbb{N}^3)\Big[(\forall \langle m, n, k\rangle \in \mathbb{N}^3)\big[\langle m, n, k\rangle \sqsubset \langle x, y, z\rangle \Longrightarrow P(m, n, k)\big]$$

$$\Longrightarrow P(x, y, z)\Big].$$

Дом.

$$(\forall \langle x, y, z\rangle \in \mathbb{N}^3)[P(x, y, z)].$$

Прог е коректна и терм.

$$P(x, y, z) \leftrightarrows g(x, y, z) = (z+1)(x+y).$$

(Задача 2).