Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по Дискр. Стр-ри на Информатика, 17 април 2021 г.

Вариант 1

Зад. 1 Нека p, q и r са произволни съждения. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$,
- $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv p \vee q$,

Решение: Да докажем първата еквивалентност. За простота да заменим $p \wedge q$ с u. Тогава това, което трябва да покажем, е $u \vee (u \wedge r) \equiv u$. Но това е едно от свойствата на логическите съюзи, изучавано на лекции и наречено "свойство на поглъщането".

Да докажем втората еквивалентност. За простота да заменим $p \vee q$ с u. Тогава това, което трябва да покажем, е $u \wedge (u \vee r) \equiv u$. Но това също е едно от свойствата на логическите съюзи, изучавано на лекции, също наречено "свойство на поглъщането".

Зад. 2 Нека S е крайно непразно множество. Нека $R \subseteq 2^S \times 2^S$ е дефинирана така:

$$\forall X \in 2^S \; \forall Y \in 2^S : X \, R \, Y \leftrightarrow |X| \leq |Y| \tag{1}$$

по 1 т. Изследвайте R за рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

Нека $Q \subseteq 2^S \times 2^S$ е дефинирана така:

$$\forall X \in 2^S \; \forall Y \in 2^S : X \, Q \, Y \leftrightarrow X \, R \, Y \wedge Y \, R \, X$$

по 1 т. Изследвайте Q за рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

11 т. Нарисувайта диаграмата на R, ако $S = \{a, b, c\}$.

11 т. Нека $S = \{a, b, c\}$. Ако Q е релация на частична наредва, нарисувайте диаграмата на Hasse на Q. Ако Q е релация на еквивалентност, намерете класовете на еквивалентност на Q.

Решение: На прост български, за две подмножества X, Y на S е вярно, че $(X, Y) \in R$ тстк мощността на X не надхвърля мощността на Y. R е рефлексивна, защото мощността на никое множество не надхвърля себе си. R не е симетрична, защото, например, $|\{a, b\}| \leq |\{a, b, c\}|$, но $|\{a, b, c\}| \nleq |\{a, b\}|$. R не е антисиметрична, защото различни подмножества може да са такива, че всяко е в релация с другото, например $|\{a, b\}| \leq |\{a, c\}|$ и $|\{a, c\}| \leq |\{a, b\}|$. R е транзитивна, което следва веднага от транзитивността на релацията $\leq$.

Q е рефлексивна, защото при $X = Y$ в дефиницията вдясно от "$\leftrightarrow$" имаме $X \, R \, X \wedge X \, R \, X$, което е еквилентно на $X \, R \, X$ съгласно идемпотентността на конюнкцията, а вече видяхме, че R е рефлексивна. Q е симетрична, което следва директно от комутативността на конюнкцията в "$X \, R \, Y \wedge Y \, R \, X$". Q не е антисиметрична, защото за различни X и Y може да е вярно, че $X \, R \, Y \wedge Y \, R \, X$; вече видяхме такъв пример. Q е транзитивна, защото

$$(X \, R \, Y \wedge Y \, R \, X) \wedge (Y \, R \, Z \wedge Z \, R \, Y)$$

е еквивалентно, поради комутативността и асоциативността на конюнкцията, на

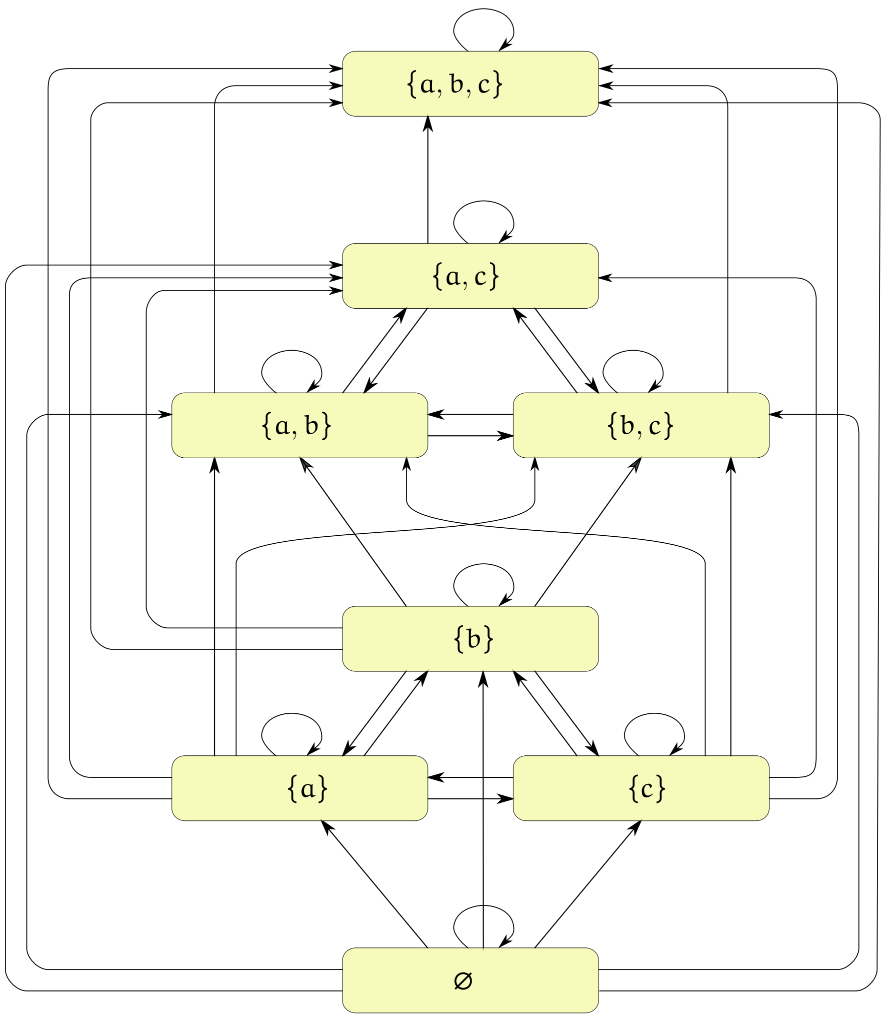
$$(X \, R \, Y \wedge Y \, R \, Z) \wedge (Z \, R \, Y \wedge Y \, R \, X)$$

което влече, съгласно транзитивността на R,

$$X \, R \, Z \wedge Z \, R \, X$$

Виждаме, че Q е релация на еквивалентност.

Ето диаграма на R при $S = \{a, b, c\}$:



Тъй като Q е релация на еквивалентност, ще опишем класовете ѝ на еквивалентност. Те са четири на брой, а именно $\{\varnothing\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ и $\{\{a, b, c\}\}$.

Зад. 3 По колко начина можем да раздадем 90 билета на 30 човека, така че всеки човек да получи поне един билет? Билетите са два по два различни.

Решение: Отговорът е същият като отговора на въпроса, колко са сюрекциите от m елементен домейн в n елементен кодомейн, ако $m = 90$ и $n = 30$. Съгласно изучаваното на лекции, отговорът на това е

$$\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} (30 - k)^{90}$$

Зад. 4 Нека ABC е равностранен триъгълник със страна 1. Докажете, че както и да изберем 5 точки от вътрешността на ABC, поне две от тях са на разстояние, по-малко от $\frac{1}{2}$.

Решение: Нека средата на страната AB се нарича X, средата на страната BC да е Y и средата на страната AC да е Z. Построяваме отсечките XY, YZ и XZ. Разглеждаме разбиване на вътрешността на триъгълника ABC на четири множества:

- вътрешността на триъгълника AXZ плюс вътрешността на отсечката XZ,
- вътрешността на триъгълника BXY плюс вътрешността на отсечката XY,
- вътрешността на триъгълника CYZ плюс вътрешността на отсечката YZ,
- вътрешността на триъгълника XYZ.

Това са чекмеджетата. Както и да сложим пет точки във вътрешността на ABC (петте точки са ябълките), има поне едно чекмедже с поне две ябълки. Но за всяко от въпросните четири множества е вярно, че всеки две негови точки са на разстояние, по-малко от $\frac{1}{2}$.

Вариант 2

Зад. 1 За всяко от следните съждения, определете дали е истина или лъжа, и дайта солидна аргументация:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 0 \rightarrow 3x + 1 > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x < 10 \rightarrow x^2 \geq 0.$

Решение: Първото съждение е истина, защото квадратът на реално число не може да е отрицателен, така че антецедентът на импликацията е лъжа за всяко x, което прави импликацията истина за всяко x. Второто съждение е истина, защото консеквентът е истина за всяко x. Ако това не е ясно, препишете го в еквивалентна форма

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 10 \vee x^2 \geq 0$$

и сега вече е напълно ясно, че твърдението е вярно.

Зад. 2 Функцията $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е дефинирана така:

$$f(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{ако } m = 0 \\ f(m-1, 1), & \text{ако } m > 0 \text{ и } n = 0 \\ f(m-1, f(m, n-1)), & \text{ако } m > 0 \text{ и } n > 0 \end{cases}$$

2 т. Пресметнете $f(1, 3)$.

13 т. Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(1, n) = n + 2$.

2 т. Пресметнете $f(2, 3)$.

13 т. Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(2, n) = 2n + 3$.

Решение: Тази функция е известна като функцията на Ackermann. Да пресметнем $f(1, 3)$.

$$\begin{aligned} f(1,3) &= f(0, f(1,2)) \\ f(1,2) &= f(0, f(1,1)) \\ f(1,1) &= f(0, f(1,0)) \\ f(1,0) &= f(0,1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} f(1,1) &= f(0,2) = 3 \\ f(1,2) &= f(0,3) = 4 \\ f(1,3) &= f(0,4) = 5 \end{aligned}$$

Отговорът е 5.

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(1, n) = n + 2$ с индукция по n.

Базата е $n = 0$. Трябва да покажем, че $f(1, 0) = 0 + 2$. От една страна, $f(1, 0) = 2$, както вече изведохме, а от друга страна, $0 + 2 = 2$. ✓

Индукнивното предположение е, че $f(1, n) = n + 2$ за някое естествено n.

Въз основа на индуктивното предположение ще докажем, че $f(1, n + 1) = n + 3$. По определение, $f(1, n + 1) = f(0, f(1, n + 1 - 1))$, тоест, $f(1, n + 1) = f(0, f(1, n))$. Но от индуктивното предположение имаме $f(1, n) = n + 2$. Тогава $f(1, n + 1) = f(0, n + 2)$. По определение, това е $n + 2 + 1 = n + 3$. ✓

Да пресметнем $f(2,3)$.

$$\begin{aligned}
f(2,3) &= f(1, f(2,2)) \\
f(2,2) &= f(1, f(2,1)) \\
f(2,1) &= f(1, f(2,0)) \\
f(2,0) &= f(1,1)
\end{aligned}$$

Но $f(1,1) = 3$, както вече видяхме. Тогава $f(2,1) = f(1,3)$, което е $3+2 = 5$. Тогава $f(2,2) = f(1,5)$, което е $5+2 = 7$. Тогава $f(2,3) = f(1,7)$, което е $7+2 = 9$. Отговорът е 9.

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(2,n) = 2n+3$ с индукция по n.

Базата е $n = 0$. Трябва да покажем, че $f(2,0) = 2\cdot 0+3$. От една страна, $f(2,0) = f(1,1)$ по определение, а $f(1,1) = 3$, както вече видяхме. От друга страна, $2 \cdot 0 + 3 = 3$. ✓

Индукнивното предположение е, че $f(2,n) = 2n+3$ за някое естествено n.

Въз основа на индуктивното предположение ще докажем, че $f(2,n+1) = 2(n+1)+3$, тоест, че $f(2,n+1) = 2n+5$. По определение, $f(2,n+1) = f(1, f(2,n+1-1))$, тоест, $f(2,n+1) = f(1, f(2,n))$. Но от индуктивното предположение имаме $f(2,n) = 2n+3$. Тогава $f(2,n+1) = f(1, 2n+3)$. Но, както вече доказахме, $f(1, 2n+3) = 2n+3+2$, което е $2n+5$. ✓

Зад. 3 По колко начина можем да раздадем 90 еднакви билета на 30 човека, така че всеки човек да получи поне един билет?

Решение: Тъй като билетите са неразличими, първо раздаваме по един билет на всеки човек, така че всеки човек да има поне един билет. После раздаваме останалите 60 билета произволно на 30-те човека. Както знаем от лекции, това може да сторим по

$$\binom{60+30-1}{30-1} = \binom{89}{29}$$

начина.

Зад. 4 Нека A е множество от шест цели положителни числа, най-голямото от които не е по-голямо от 14. Нека $B = \{X \subseteq A \mid X \neq \emptyset\}$. Докажете, че

$$\exists Y \in B\ \exists Z \in B \left(Y \neq Z \text{ и } \sum_{a \in Y} a = \sum_{a \in Z} a \right)$$

Решение: Иска се да се докаже, че има различни непразни подмножества на A с една и съща сума. Естествено е да опитаме да решим задачата с принципа на чекмеджетата.

Подмножество на A може да има най-много шест елемента, тоест, да е самото A, и сумата на елементите може му да е най-много

$$14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 = 69$$

понеже елементите са различни цели числа, ненадхвърлящи 14.

Непразно подмножество на A може да има най-малко един елемент, който може да е най-малко 1. Това дава горна граница от 69 различни възможности за сумата. Това са чекмеджетата.

Непразните подмножества на A обаче са $2^6 - 1 = 63$. Това са ябълките. Не може да приложим принципа директно, защото ябълките са прекалено малко.

Ще разгледаме само тези непразни подмножества на A, които имат не повече от 5 елемента. Сумата от елементите на такова множество е най-много

$$14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 60$$

Значи, не повече от 60 чекмеджета. Броят на тези подмножества е $2^6 - 1 - 1 = 62$; вадим 1 заради празното множество и още веднъж 1 заради шестелементното подмножество. Сега ябълките са 62. Съгласно принципа на чекмеджетата, поне едно чекмедже има повече от една ябълки; тоест, поне две непразни подмножества, нито едно от които не е A, имат една и съща сума на елементите. ✓