Решения на домашно №2 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012 г.

Зад. 1: Колко двадесетцифрени десетични числа можем да запишем

1 т. **а)** без ограничения ;

1 т. **б)** с деветте цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, така че всяка да се среща поне един път ;

3 т. **в)** с деветте цифри 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, така че всяка да се среща поне един път ;

1 т. **г)** с десетте цифри, така че всяка цифра да се среща точно два пъти.

В запис на число не се допускат водещи нули, освен ако то не е нула.

Решение:

а) Числото трябва да има точно двадесет цифри. Отговорът е, по принципа на декартовото произведение, $9 \cdot 10^{19}$, тъй като множеството от записите на числата е $I_9 \times J_{10}^{19}$.

б) Тъй като нулата не участва, задачата е същата като задачата, колко са сюрекциите с 20 елементен домейн и 9 елементен кодомейн. Отговорът е

$$\sum_{k=0}^{9} (-1)^k \binom{9}{k} (9-k)^{20} = 4\,358\,654\,246\,117\,808\,000$$

по принципа на включването и изключването.

в) Има 8 възможности за водещата цифра, понеже нулата не може да е водеща. След като веднъж изберем водещата цифра, вече не е задължително, въпреки че остава възможно, тя да се появи на останалите 19 позиции. Следователно, търсим броя на функциите с 19 елементен домейн от позициите, да го наречем X и 9 елементен кодомейн от цифрите, да го наречем Y, такива че 8 дадени елемента от домейна да бъдат задължително изображения. Разсъжденията са пак с метода на включване и изключване. Универсумът има мощност 9^{19} – толкова са всички тотални функции $f : X \to Y$. За всеки от задължителните 8 елемента, функциите, които не го "покриват", са $(9-1)^{19}$. Разликата

$$9^{19} - 8 \cdot (9-1)^{19}$$

обаче е по-малка от верния отговор, защото вади някои функции по повече от един път. Продължаваме с разсъжденията съгласно принципа на включването и изключването: за всяка двойка от задължителните 8 елемента, а има $\binom{8}{2}$ такива двойки, функциите, които не покриват тези елементи, са $(9-2)^{19}$, и така нататък. Получаваме

$$9^{19} - 8 \cdot (9-1)^{19} + \binom{8}{2}(9-2)^{19} - \binom{8}{3}(9-3)^{19} + \ldots - \binom{8}{7}(9-7)^{19} + \binom{8}{8}(9-8)^{19}$$

което е $484\,294\,916\,235\,312\,000$. Съобразяваме, че това е само за една от осемте възможни водещи цифри, и получаваме крайния отговор $8 \times 484\,294\,916\,235\,312\,000 = 3\,874\,359\,329\,882\,496\,000$.

г) Водещата цифра е коя да е, различна от нулата. За всяка от тези 9 възможности имаме 19 позиции, на които поставяме една цифра от вида, който сложихме в началото, и още девет двойки цифри. Отговорът се получава като произведение от 9 и мултиномен коефициент:

$$9 \times \frac{19!}{1! \times \underbrace{2! \times 2! \times \cdots \times 2!}_{9 \text{ пъти}}} = 2\,138\,292\,780\,624\,000$$

□

1 т. **Зад. 2:** Измежду числата $1, 2, \ldots, 10^{10}$, кои са повече: тези, чиито запис (в десетична позиционна бройна система) съдържа цифрата 9, или другите, чиито запис не съдържа 9?

Решение: Съществува естествена биекция между тези числа и векторите от $\mathcal{J} = J_{10}^{10} \setminus J_1^{10}$. Числата, имащи поне една деветка в десетичния си запис, отговарят на точно тези вектори, имащи поне една деветка. Нека $\mathcal{J}'$ са векторите с поне една деветка, а $\mathcal{J}''$ са тези без нито една деветка. Очевидно $\mathcal{J}$ се разбива на $\mathcal{J}'$ и $\mathcal{J}''$, така че $|\mathcal{J}'| = |\mathcal{J}| - |\mathcal{J}''|$. Очевидно $|J_{10}^{10}| = 10^{10}$ по формулата за броя на комбинаторните конфигурации с наредба и с повторение и $|J_1^{10}| = 1^{10}$ по същата причина. Тогава $|\mathcal{J}| = 10^{10} - 1$. Освен това, $\mathcal{J}'' = J_9^{10} \setminus J_1^{10}$ и аналогично $|\mathcal{J}''| = 9^{10} - 1$. Следователно числата, чиито запис съдържа 9, са $10^{10} - 9^{10} = 6\,513\,215\,599$. Всички числа са 10^{10}, следователно тези, чиито запис няма 9, са $3\,486\,784\,401$. Очевидно тези от първия вид са повече.

Задачата може да се реши и другояче. Твърдим, че рекурентното отношение

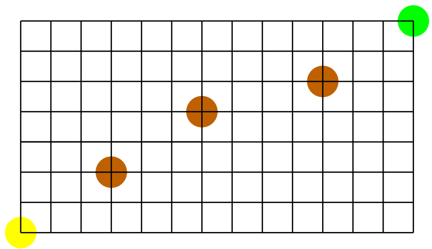
$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 9T_{n-1} + 10^{n-1}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

дава броя на числата с не повече от n цифри в десетична бройна система, чиито запис има поне една деветка. Аргументацията е, че множеството от тези числа се разбива на три подмножества:

- T_{n-1}.
- числата, които които имат точно n цифри и се получават от числата от T_{n-1} чрез поставяне вляво (като водеща цифра) на някоя от цифрите $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и вдясно от нея, записа на числото от T_{n-1}, като при това, ако този запис има по-малко от $n-1$ цифри, попълваме с необходимия брой нули между водещата цифра и него, така че общата дължина да стане точно n. Това множество има мощност $8T_{n-1}$.
- числата, които имат точно n цифри и водеща цифра 9. Това множество има мощност 10^{n-1}.

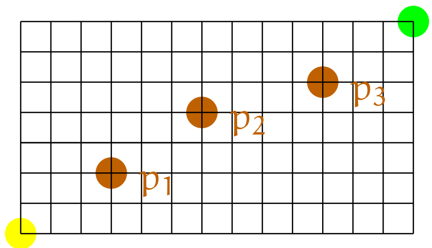
Решението на това рекурентно отношение е $T_n = 10^n - 9^n$. □

2 т. **Зад. 3:** Разгледайте следната правоъгълна мрежа:



Разгледайте всички придвижвания в нея, в които тръгвате от долния ляв ъгъл, маркиран с жълт кръг, и пристигате в горния десен ъгъл, маркиран със зелен кръг. Разрешени са ходове само нагоре или надясно по мрежата, също както в примера на лекции. Колко от тези придвижвания минават през поне една от трите пресечки, означени с кафяви кръгове?

Решение: Да номерираме точките p_1, p_2 и p_3:



Нека N_k е множеството от придвижванията, минаващи през p_k, за $1 \leq k \leq 3$. Търсим $|N_1 \cup N_2 \cup N_3|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = |N_1| + |N_2| + |N_3| - (|N_1 \cap N_2| + |N_2 \cap N_3| + |N_1 \cap N_3|) + |N_1 \cap N_2 \cap N_3|$$

Имаме:

$$\begin{aligned}
|N_1| &= \binom{3+2}{2}\binom{10+5}{5} &&= 30\,030\\
|N_2| &= \binom{6+4}{4}\binom{7+3}{3} &&= 25\,200\\
|N_3| &= \binom{10+5}{5}\binom{3+2}{2} &&= 30\,030\\
|N_1 \cap N_2| &= \binom{3+2}{2}\binom{3+2}{2}\binom{7+3}{3} &&= 12\,000\\
|N_2 \cap N_3| &= \binom{6+4}{4}\binom{4+1}{1}\binom{3+2}{2} &&= 10\,050\\
|N_1 \cap N_3| &= \binom{3+2}{2}\binom{7+3}{3}\binom{3+2}{2} &&= 12\,000\\
|N_1 \cap N_2 \cap N_3| &= \binom{3+2}{2}\binom{3+2}{2}\binom{4+1}{1}\binom{3+2}{2} &&= 5\,000
\end{aligned}$$

Отговорът е $56\,210$. $\square$

Зад. 4: В лекционна зала с 10 места, подредени в редица, седят 10 студента. С пристигането си преподавателят изисква студентите да се разместят така, че никой да не седи на мястото, на което седи в момента. По колко начина може да стане това, ако:

1 т. • всички студенти изпълняват изискването;

1 т. • точно три студента отказват да се преместят;

1 т. • всички студенти изпълняват изискването, но при ограничението, че тези, които са били вляво от средата на редицата, остават вляво от нея и след преместването;

Бонус 4 т. • *всички студенти изпълняват изискването, но при ограничението, че разместването има една или две орбити?*

Решение: В първата подзадача става дума за пермутации на 10 елемента, при които нито един елемент не си е на мястото. Отговорът е $10! \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{k!} = 1\,334\,961$, което се показва лесно с принципа на включване и изключване. Във втората подзадача става дума за същото, само че елементите са 7. Отговорът е $7! \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k!} = 1\,854$. В третата подзадача множеството от решенията е декартовото произведение на две множества пермутации, всяка на 5 елемента и такава, че никой елемент не си остава на мястото. Отговорът е $\left(5! \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!}\right)^2 = 44^2 = 1\,936$.

Да разгледаме бонус задачата. Очевидно броят на орбитите на пермутация на n елемента е число между 1 и n. Лесно се забелязва, че пермутация да размества всички елементи (никой да не си остава на мястото) е същото като графа на пермутацията (описан в упътването към условието) да няма примки. Ако елементите са повече от един, както е в тази задача, и орбитата е само една, няма как елемент да си остане на мястото. Следователно, всички пермутации със само една орбита са от вида, който искаме да броим. Лесно се вижда, че пермутациите със само една орбита на n елемента са $(n-1)!$ на брой, в нашата задача това е $9! = 362\,880$.

Сега да разгледаме пермутациите с точно две орбити на n елемента. Да означим това количество с $T(n)$. Очевидно $T(1) = 0$ и $T(2) = 1$. Ще покажем, че

$$T(n) = (n-1)T(n-1) + (n-2)! \tag{1}$$

Да разгледаме всички възможности за образуване на пермутация с две орбити на n елемента $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ от пермутация (не непременно с две орбити) на $n-1$ елемента $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Имаме следното разбиване.

- Пермутацията на $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ има точно две орбити, за което има $T(n-1)$ начина. В този случай "вмъкваме" a_n в съществуваща орбита, което можем да направим по $n-1$ начина независимо от това колко е дълга едната или другата орбита, важното е, че дължините им се сумират до $n-1$.

- Пермутацията на $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ има точно една орбита. В този случай a_n трябва да образува едноелементна орбита, за да може да имаме общо две орбити върху $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Както видяхме, пермутациите на $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ с точно една орбита са $(n-2)!$.

Съгласно принципа на разбиването, имаме (1). Това рекурентно отношение не може да се реши с метода с характеристичното уравнение, но може да се реши с развиване.

Числото 10 е достатъчно малко, така че отношението да може да се развие напълно с начално условие $T(2) = 1$.

$$
\begin{aligned}
T(10) &= 9T(9) + 8! \\
&= 9(8T(8) + 7!) + 8! \\
&= 9 \cdot 8T(8) + 9 \cdot 7! + 8! \\
&= 9 \cdot 8(7T(7) + 6!) + 9 \cdot 7! + 8! \\
&= 9 \cdot 8 \cdot 7T(7) + 9 \cdot 8 \cdot 6! + 9 \cdot 7! + 8! \\
&= 9 \cdot 8 \cdot 7(6T(6) + 5!) + 9 \cdot 8 \cdot 6! + 9 \cdot 7! + 8! \\
&= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6T(6) + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5! + 9 \cdot 8 \cdot 6! + 9 \cdot 7! + 8! \\
&\dots \\
&= 9 \cdot 8 \cdots 3(2T(2) + 1!) + 9 \cdot 8 \cdots 4 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \cdots 5 \cdot 3 \cdot 2 + \cdots + 9 \cdot 7! + 8! \\
&= 9! + 9 \cdot 8 \cdots 3 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \cdots 4 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \cdots 5 \cdot 3 \cdot 2 + \cdots + 9 \cdot 7! + 8! \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Очевидно (2) се състои от 9 събираеми, всяко от което е $9!$ с точно един липсващ множител измежду $1, \dots, 9$ (можем да си мислим, че в $9!$ липсва единицата). Тогава

$$
T(10) = 9! \cdot \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k} = 1\,026\,576
$$

Забелязваме, че $T(10)$ не равно на, а е повече от, броя на интересуващите ни пермутации с точно две орбити. Причината е, някои от тези пермутации оставят един елемент на мястото му – а именно перимутациите, които имат (точно една) едноелементна орбита. Трябва да извадим техния брой от $T(10)$. Нека $S(n)$ е броят на пермутациите на n елемента, в които има точно две орбити и едната от тях се състои от един елемент (тоест, е примка). Начините да бъде избран елементът с примката са n, за всеки от тях останалите $n - 1$ може да бъдат разместени с една орбита по $(n - 2)!$ начина. Следователно, $S(n) = n(n-2)!$. В нашата задача $S(10) = 403\,200$.

Броят на пермутациите с точно две орбити, които не оставят нито един елемент на място, са $T(10) - S(10) = 623\,376$. Броят на пермутациите с една или две орбити тогава е $362\,880 + 623\,376 = 986\,256$.

Зад. 5: Нека

$$
F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}
$$

2 т. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : F_{3n} = 2k$

И това е бонус, 2 т. *Докажете още по индукция, че* $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : F_{5n} = 5k$

Доказателство на първото твърдение: Ще докажем по-силно твърдение: всяко число на Фибоначи е четно тогава и само тогава, когато индексът се дели на 3. Тоест,

F_{3n} са четни, а F_{3n+1} и F_{3n+2} са нечетни, за всяко естествено n. Базата е за $n = 0$: $F_0 = 0$ наистина е четно, а $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$ са нечетни. ✓

Допускаме, че за някакво естествено n, F_{3n} е четно, а F_{3n+1} и F_{3n+2} са нечетни. Разглеждаме $F_{3(n+1)} = F_{3n+3}$, $F_{3(n+1)+1} = F_{3n+4}$ и $F_{3(n+1)+2} = F_{3n+5}$.

$$F_{3n+3} = \underbrace{\underbrace{F_{3n+2}}_{\text{нечетно}} + \underbrace{F_{3n+1}}_{\text{нечетно}}}_{\text{четно}}$$

$$F_{3n+4} = \underbrace{\underbrace{F_{3n+3}}_{\text{четно}} + \underbrace{F_{3n+2}}_{\text{нечетно}}}_{\text{нечетно}}$$

$$F_{3n+5} = \underbrace{\underbrace{F_{3n+4}}_{\text{нечетно}} + \underbrace{F_{3n+3}}_{\text{четно}}}_{\text{нечетно}}$$

Доказателство на бонуса: Ще докажем по-силно твърдение: всяко число на Фибоначи с индекс, делящ се на 5, се дели на 5, и всяко число на Фибоначи с индекс, даващ остатък 1 при деление на 5, не се дели на 5. Тоест, F_{5n} се дели на 5, а F_{5n+1} не се дели на 5. Базата е за $n = 0$: $F_0 = 0$ наистина се дели на 5, а $F_1 = 1$, не. ✓

Допускаме, че за някакво естествено n, F_{5n} се дели на 5, а F_{5n+1}, не. Тогава F_{5n} дава остатък 0, а F_{5n+1} дава остатък 1 или 2 или 3 или 4, при деление на 5. Ще разгледаме тези случаи поотделно.

Ако F_{5n} дава остатък 0 и F_{5n+1} дава остатък 1 при деление на 5, то остатъците на F_{5n+2}, F_{5n+3}, F_{5n+4}, $F_{5n+5} = F_{5(n+1)}$, $F_{5n+6} = F_{5(n+1)+1}$ са съответно 1, 2, 3, 0 и 3.

Ако F_{5n} дава остатък 0 и F_{5n+1} дава остатък 2 при деление на 5, то остатъците на F_{5n+2}, F_{5n+3}, F_{5n+4}, $F_{5n+5} = F_{5(n+1)}$, $F_{5n+6} = F_{5(n+1)+1}$ са съответно 2, 4, 1, 0 и 1.

Ако F_{5n} дава остатък 0 и F_{5n+1} дава остатък 3 при деление на 5, то остатъците на F_{5n+2}, F_{5n+3}, F_{5n+4}, $F_{5n+5} = F_{5(n+1)}$, $F_{5n+6} = F_{5(n+1)+1}$ са съответно 3, 1, 4, 0 и 4.

Ако F_{5n} дава остатък 0 и F_{5n+1} дава остатък 4 при деление на 5, то остатъците на F_{5n+2}, F_{5n+3}, F_{5n+4}, $F_{5n+5} = F_{5(n+1)}$, $F_{5n+6} = F_{5(n+1)+1}$ са съответно 4, 3, 2, 0 и 2. □

4 т. **Зад. 6:** За всяко реално число x и естествено n, нотацията $x^{\underline{n}}$ е кратък запис за:

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

Докажете следния аналог на теоремата на Нютон:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \qquad x, y, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \quad \leftrightarrow \\
\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}}}{n!} \quad \leftrightarrow \quad \left(\text{прилагаме вляво } \frac{p^{\underline{q}}}{q!} = \binom{p}{q} \right) \\
\binom{x+y}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n!} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \quad \leftrightarrow \\
\binom{x+y}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{n!} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \quad \leftrightarrow \\
\binom{x+y}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \quad \leftrightarrow \\
\binom{x+y}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} \quad \leftrightarrow \quad \left(\text{два пъти прилагаме вдясно } \frac{p^{\underline{q}}}{q!} = \binom{p}{q} \right) \\
\binom{x+y}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Тъждество (4) можем лесно да докажем с комбинаторни разсъждения: избираме n елемента от $(x+y)$-елементно множество, в което x елемента са “бели”, а останалите y, “черни”. Измежду избраните елементи, k са бели, за някакво k, такова че $0 < k < \min\{n, x\}$, съответно $n-k$ са черни. Лявата страна на (4) брои директно начините за избирането, а дясната брои по-детайлно, правейки разбиване по броя на белите елементи в избраното подмножество. Ако $x < n$, което е възможно дори когато $x+y \geq n$, всички биномни коефициенти $\binom{x}{k}$, в които $x < k$, са нули. Тъждеството $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, доказано на лекция, е частен случай на (4). $\square$