Тема: комбинаторика, I част

РЕШЕНИЯ

Зад. 1: (20 т.) Момичетата от 12 клас на едно училище – 13 на брой – си поръчват бални рокли в едно и също ателие, което предлага 17 различни модела и 15 различни плата. Колко са различните възможни начини, по които могат да се появят на бала 13-те момичета, ако

а) няма две момичета с еднакви рокли?

Решение: Две рокли се различават, ако са ушити по различни модели или от различни платове. Така броят на различаващите се рокли, ушити по 17 модела и от 15 различни плата е 17.15=255. Тъй като не трябва да има момичета с еднакви рокли, то това са комбинаторни конфигурации с наредба и без повторение от 255 елемента, 13-ти клас, броят на които е $255.254.\ldots.243 = \frac{255!}{242!}$.

б) Няма две еднакви рокли, но всички рокли са от един и същ плат?

Решение: За всеки от 15-те възможни плата важи следното: от него могат да се ушият 17 различаващи се рокли, които 13-те момичета могат да се облекат по $17.16.\ldots.5= \frac{17!}{4!}$ различни начина. Така различните обличания, съответни на условието са $15.\frac{17!}{4!}$.

в) няма повторение на модели?

Решение: Избор на модел без повторение момичетата могат да направят по $\frac{17!}{4!}$ начина. С това вече е осигурено 13-те рокли да са уникални, така че всяка от тях може да бъде ушита от всеки от 15-те плата – получава се наредена конфигурация с повторение 15^{13}. С всеки избор на модел може независимо да се съчетае всеки от изборите на плат, така възможните обличания в този случай са $\frac{17!}{4!}.15^{13}$

г) няма никакви ограничения за плата и модела?

Решение: Вече установихме, че броят на различаващите се рокли е 255. Всеки избор на момичетата определя една функция, с домейн множеството на момичетата и кодомейн множеството на роклите – 255^{13} на брой.

Зад. 2: (15 т.) Колко са различните идентификатори с дължина 5 в езика C, които

а) започват с главна буква?

Решение: Изборът на първи знак за идентификатора може да стане по 26 начина — толкова са всички главни букви. В останалите 4 позиции на идентификатора може да се среща всеки от допустимите знаци – 63 на брой. Така броят на описаните идентификатори е 26.63^4.

б) не съдържат цифри?

Решение: Всяка от 5-те позиции на идентификатора може да съдържа буква или знак за подчертаване — общо 53 знака. Това са комбинаторни конфигурации с наредба и с повторение от 53 елемента, 5-и клас, броят на които е 53^5.

в) нямат повторен знак?

Решение: Изборът на знак за първа позиция на идентификатора може да стане по 53 начина. За останалите 4 позиции могат да се избират измежду оставащите 62 знака без повторение. Това са комбинаторните конфигурации с наредба и без повторение от 62 елемента, 4-и клас. И така броят на тези идентификатори е $\frac{53.62!}{58!}$.

Зад. 3: (20 т.) Дадени са 5 еднакви бели топки, 7 еднакви зелени топки и 10 червени топки, номерирани с числата от 1 до 10. Дадени са и десет различими кутии. По колко различни начина могат да се разположат топките в кутиите така, че

а) има кутия с точно 6 червени топки?

Решение: Задачата за разполагане на топките можем да разбием на три подзадачи – за разполагане на топките от всеки един от цветовете поотделно. Тогава общият брой разполагания ще е произведение от решенията на трите подзадачи. Различните разполагания на неразличимите бели топки съответстват на ненаредена конфигурация с повторение от 10 елемента 5-и клас и броят им е $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5}$. Аналогично, броят на разполаганията на зелените топки е $\binom{10+7-1}{7}\binom{16}{7}$. Тъй като червените топки се различават помежду си, то при тяхното разполагане взимаме предвид коя е кутията с 6 топки – 10 възможни избора, кои са топките в нея - $\binom{10}{6}$ избора на 6 топки, а също и как останалите 4 червени топки се разполагат в останалите 9 кутии – общо $10.\binom{10}{6}.9^4$ възможности. И така изпълнението на трите подзадачи може да стане по $\binom{14}{5}.\binom{16}{7}.10.\binom{10}{6}.9^4$ начина.

б) има червени топки в не повече от две кутии?

Решение: Отново разбиваме задачата на три подзадачи. Решенията на първите две подзадачи са както в Зад. 3.а. Решението на подзадачата за червените топки зависи от това колко и кутии са избрани и как са разположени в тях самите топки. Случаите, в които всички червени топки са в една кутия са 10. Да разгледаме случаите, в които точно две кутии съдържат червени топки. Самите кутии избираме по $\binom{10}{2}$ начина. Кутиите са две и то различими, така че множеството от червени топки, което попадне в едната кутия, еднозначно определя разполагането, което ни интересува. От всички възможно подмножества избрани за първата кутия, трябва да елиминираме само празното множедтво и това съставено от всички 10 топки, защото тези две възможности вече сме преброили. И така броят на всички разположения на топките е $\binom{14}{5}.\binom{16}{7}.(10 + \binom{10}{2}.(2^{10}-2))$.

в) има кутия с бяла топка, зелена топка и поне 6 червени топки?

Решение: Да започнем от подзадачата за разполагане на червените топки. Тъй като те са 10, то може да има само една кутия с поне 6 топки. Да изберем първо коя е кутията — по 10 начина. Когато в избраната кутия има точно i топки, то те могат да се изберат по $\binom{10}{i}$ начина измежду всичките 10. Останалите $10-i$ червени топки могат да се разположат в останалите 9 кутии без ограничения – това са комбинаторните конфигурации с наредба и с повторение на 9 елемента, от клас $10-i$. Така разполагането на червените топки, при което има кутия с поне 6 топки става по $10.\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}.9^{10-i}$ начина. За да изпълним и условието за белите и зелените топки, нека сложим в кутията с червените топки една бяла и една зелена. Остават 4 бели топки, които можем да разположим в 10 различни кутии с възможни повторения (ненаредени конфигурации с повторение от 10 елемента, 4-ти клас), което става по $\binom{13}{4}$ начина. Аналогично, разполагането на останалите 6 зелени топки в 10-те кутии може да стане по $\binom{15}{6}$ начина. И така, броят на различните начини за разполагане на всички топки при дадените ограничения е $10.\binom{13}{4}.\binom{15}{6}\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}.9^{10-i}$.

г)няма никакви ограничения

Решение: Отново разбиваме задачата на три подзадачи. Решенията на първите две подзадачи са като в Зад. 3.а и 3.б. Разполагането на червените топки съответства на наредена конфигурация с повторение от 10 елемента, 10-и клас – 10^{10} възможности. Така броят на различните разполагания е $\binom{14}{5}.\binom{16}{7}.10^{10}$.

Зад. 4: (15 т.) Колко са думите с дължина 10 над азбуката $\{a, b, c\}$ такива, че

а) съдържат 3 букви a и броят на буквите b е по-голям от броя на буквите c?

Решение: Нека изберем първо местата на трите букви a – това може да стане по $\binom{10}{3}$ начина. Всяка от останалите 7 позиции може да съдържа буква b или c, но за да е изпълнено условието, броят на буквите b трябва да е в интервала [4,7]. Така може да разгледаме разбиване на множеството на всички думи на подмножества според броя на буквите b - 4, 5, 6 или 7, и да приложим принципа на умножението: $\binom{10}{3}.\sum_{i=4}^{7}\binom{7}{i}$.

б) всички букви a са преди всички букви b?

Решение: Тъй като няма ограничения за броя на всяка от буквите, то буквата a може да се среща от 0 до 10 пъти. Думите, в които a не участва са съставени само от b-та и c-та и значи са $2^{1}0$. Да разгледаме разбиване на множеството на останалите думи, според позицията i на най-дясната буква a в думата – тя може да е от 1 до 10. В позициите от 1 до $i-1$ може да има само букви a и cc, а в позиции от i+1 до 10 – само букви b и c. Така броят на тези думи е $2^{i-1}.2^{10-i}$. След прилагане на принципа на събирането получаваме, че броят на всички думи с исканите свойства е $2^{10}+\sum_{i=1}^{10}2^{i-1}.2^{10-i}$.

в) всички букви от един вид са в блокове, т.е между две букви от един вид няма буква от друг вид?

Решение: Тези думи се определят от две неща: коя от буквите, колко пъти се среща и взаимното разположение на блоковете. Първото е комбинаторна конфигурация без наредба и с повторение на 3 елемента от 10-и клас, броятна елементите на която е $\binom{12}{10}$=66. От тях, 3=$\binom{9}{0}.\binom{3}{1}$ съдържат само една буква, 27=$\binom{9}{1}.\binom{3}{2}$ съдържат две букви, а 36=$\binom{9}{2}.\binom{3}{3}$ съдържат по 3 букви. Второто е пермутация на блоковете на участващите букви. Така за крайния резултат получаваме 36.3! +27.2! + 3.1!.

Зад. 5: (10 т.) Две делегации, едната с 12, а другата с 15 члена се срещат за разговори около кръгла маса. По колко различни начина могат да седнат около масата по равен брой членове от всяка делегация, така че всеки делегат седи между двама члена на чуждата делегация? Едно сядане е различно от друго, ако поне един делегат има поне един различен съсед в двете сядания.

Решение: Ще разбием задачата на две подзадачи – избор на хората от двете делегации, които ще седят около масата и самото разполагане около масата. Първата подзадача се свежда до избор на две 5-елементни подмножества – от множество с 12 елемента и от множество с 15 елемента, което става по $\binom{12}{5}.\binom{15}{5}$ начина. Нека сега подредим избраните хора така, че да се редуват хора от двете делегации. На местата за първата делегация 5-те човека могат да се разместят по 5! начина, същото се отнася и за втората делегация, така разполаганията стават 5!.5!. Но исканите свойства на разположението се запазват при всяка ротация на хората около масата, както и при размяна на местата на хората, седящи симетрично относно някой диаметър на масата, следователно броят на различните сядания на избрани вече 10 човека около масата е $\frac{5!.5!}{2.10}$ Така при съчетаване на избор на хора от двете делегации и разполагането им около масата се получават $\frac{\binom{12}{5}.\binom{15}{5}.5!.5!}{20}$ възможности.

Зад. 6: (20 т.) Нека k, l и n са естествени числа, $k + l < n$. Колко са различните множества $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ и $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ такива, че $|A| = k$, $|B| = l$ и всеки елемент на A е по малък от всеки елемент на B?

Решение: Нека означим с X множеството на търсените двойки множества и да разгледаме неговото разбиване на подмножества по следния признак: в подмножеството X_i са всички двойки, за които най-големият елемент на множеството A е i, като i може да е всяко от числата от k до $n - l$. Да разгледаме двойка $(A, B) \in X_i$. Числото i вече е включено в множеството A. Следователно, в него трябва да бъдат включени още $k - 1$ числа от интервала [1,i-1], а това може да стане по $\binom{i-1}{k-1}$ начина. Аналогично, изборът на множеството B може да стане по $\binom{n-i}{l}$ начина измежду числата от интервала [i+1, n]. Така броят на елементите на множеството X_i е $\binom{i-1}{k-1}.\binom{n-i}{l}$, а броят на всички допустими двойки е $\sum_{i=k}^{n-l} \binom{i-1}{k-1}.\binom{n-i}{l}$.