Дискретни структури, I курс, I поток, сп. Компютърни науки

Домашно №2, КОМБИНАТОРИКА, II част
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1: (40 т.) В магистърска програма X има 17 студенти, а в магистърска програма Y – 14 студенти. Всеки от тях трябва да избере и посещава един от общо 10 избираеми курса. По колко начина студентите могат да направят своя избор така, че:

a) да няма никакви ограничения при избора;
Решение: Тъй като няма никакви ограничения при избора, който правят студентите, то на този избор можем да гледаме като на функция с домейн множеството на студентите от двете магистърски програми и кодомейн – множеството на избираемите курсове – наредените извадки с повторение на 10 елемента с дължина 31: 10^{31}.

b) няма курс, избран от всички студенти от магистърска програма *Y;*
Решение: В този случай трябва да разглеждаме отделно избора на студентите от двете магистърски програми. За тези от програма *X,* отново няма ограничения, така че техният избор може да стане по 10^{17} начина. За да се съобразят студентите от програма Y с изискването от условието, трябва техният избор да не е константа. Тъй като имаме 10 възможни константи, от Принципаза изваждане получаваме за броя $10^{14}-10$. Тъй като изборът на студентите от програма X е независим от този на студентите от програма Y, то за общия брой на възможните начини за избор на спецкурс получаваме, съгласно принципа на умножението: $10^{18}(10^{13}-1)$.

c) всеки курс е избран от поне един студент от магистърска програма X;
Решение: В този случай студентите от програма Y имат право на избор без ограничения, така че той може да стане по 10^{14} начина. За да може всеки курс да е избран от студент от програма X, то трябва техният избор да бъде функция-сюрекция. Този брой намираме с Принципа за включване и изключване. Всички възможни избирания както вече установихме са 10^{17}, което можем да напишем като $\binom{10}{0}.(10-0)^{17}$. О тях трябва да изключим изборът при който поне един курс не е записан – курса избираме по $\binom{10}{1}$

начина и за всеки такъв избор имаме по $(10-1)^{17}$ възможности или $\binom{10}{1}.(10-1)^{17}$ възможности. Сега да върнем обратно в сумата тези $\binom{10}{2}.(10-2)^{17}$ избора при които поне 2 курса на се избрани, които сме изключили два пъти и т.н.От принципа за включване и изключване получаваме за търсения брой $\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}(10-i)^{17}$. Отново прилагаме Принципа за умножение за да намерим общия брой на изборите на студентите от двете програми – $10^{14}.\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}(10-i)^{17}$.

d) всеки курс е избран от студенти и от двете магистърски програми.

Решение: Изборът на студентите от всяка от двете магистърски програми трябва да бъде функция сюрекция и този брой намираме, както в подзадача **c,** с прилагане ан Принципа за включване и изключване. Тъй като двата избора са независими един от друг, то трябва да приложим Принципа за умножение, за да намерим общият брой на изборите: $\left[\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}(10-i)^{17}\right].\left[\sum_{j=0}^{10}(-1)^j\binom{10}{j}(10-j)^{14}\right]$.

Задача 2: (30 т.) В група от k деца се раздават n различни подаръка. Определете:

a) за какви стойности на n е сигурно, че както и да се раздадат подаръците, поне едно дете ще получи поне три подаръка;

Решение: Очевно е следното обобщение на Принципа на Дирихле – ако поставим повече от pk предмета в k кутии, то поне в една от кутиите ще има поне $p + 1$ предмета. Значи, за да има поне едно дете, което ще получи поне три подаръка, трябва броят на подаръците n да е по голям от $2k$.

b) ако за всяко дете е подготвен точно един подарък, надписан с неговото име и при раздаването всяко дете получава точно един подарък, то при колко от различните възможни раздавания нито едно дете няма да получи своя подарък;

Решение: Ще приложим Принципа за включване и изключване. Произволно раздаване на подаръците на k деца можем да разгледаме, като пермутация на числата от 1 до k, броят на които е $k! = \binom{k}{0}(k-0)!$ Тъй като се интересуваме от раздаванията, при които никое дете не получава своя подарък, да извадим от тях пермутациите, в които поне едно дете получава своя подарък – детето можем да изберем по $\binom{k}{1}$ начина, а останалите подаръци да раздадем по

$(k-1)!$ начина – $\binom{k}{1}(k-1)!$ възможности. Очевидно е обаче, че при това всеки от случаите на поне две деца, получили своя подарък са извадени два пъти, затова да върнем тези $\binom{k}{2}(k-2)!$ случаи обратно и т.н. От принципа за включване и изключване получаваме за търсения брой $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)!$.

c) по колко начина подаръците могат да се раздадат на децата $c_1,\ldots,c_k$ така, че детето c_i, $i = 1, 2,\ldots, k$, да получи n_i подаръка, където $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Решение: Произволно раздаване на подаръците на k деца можем да разгледаме, като пермутация на числата от 1 до n, след което първите n_1 подаръка в пермутацията получава първото дете, следващите n_2 – второто, и т.н., а последните n_k – k-тото дете. При това всички пермутации, на които множествата от първите n_1 елемента съвпадат са едно и също раздаване, аналогично за пермутациите с еднакви множества от следващите n_2 елемента и т.н. За да елеминираме тези повторения, съгласно Принципа за деление, трябва общия брой на пермутациите на n елемента да разделим на броя на пермутациите на n_1 елемента, на броя на пермутациите на n_2 елемента, и т.н., на броя на пермутациите на n_k елемента: $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Задача 3. (15 т.) Нека M е множество, съставено от 10 естествени числа, не надминаващи 100. Да се докаже, че съществуват две непресичащи се подмножества на M с еднакви суми на елементите си.

Решение: Нека $X \subseteq M$. Да означим с S_X сумата на елементите на X. Пред вид условието, за S_X са в сила следните неравенства: $0 \le S_X \le 955$, защото $955 = 91 + 92 + \ldots +100$ е най-голямата възможна сума на елементите на произволно подмножество на M. Т.е. възможните различни суми са 956.

От друга страна, броят на подмножествата на M, различни от Ø и от самото M е $2^{10} - 2 = 1022$. От принципа на Дирихле следва, че съществуват две непразни множества $A \subset M$ и $B \subset M$, такива че $|S_A| = |S_B|$. Възможно ли е те да имат непразно сечение – да, но щом сумата от елемените им е еднаква, не може кое да е от тях да бъде подмножество на другото. Тогава да разгледаме множествата $A' = A \setminus B$ и $B' = B \setminus A$. Тъй като $|S_{A'}| = |S_A| - |S_{A\cap B}|$ и $|S_{B'}| = |S_B| - |S_{A\cap B}|$, то от това следва равенството $|S_{A'}| = |S_{B'}|$. И така, множествата A' и B' отговарят на условието – те не се пресичат и сумите на елементите им са равни.

Задача 4. (15 т.) В играта на покер всеки играч получава 5 измежду възможните 52 карти. По колко различни начина един играч може да получи

5 карти, в които има 3 фигури (Валета, Дами или Попове), но не повече от 2 пики. **Заб.** В тестето от 52 карти има 13 вида карти, по 4 карти от всеки вид – по една от всеки от „цетовете“ пика, купа, каро и трефа.

<u>Решение:</u> За да решим задачата нека първо намерим броя на няколко множества, които ще ни трябват:

- множеството на фигурите F съдържа 12 карти – по четири от всеки от видовете Валета, Дами или Попове; три от фигурите са пики, а останалите 9 – от другите три цвята (да означим това множество с F_*).
- множеството на нефигурите N съдържа 40 карти; 10 от тях са пики, а останалите 30 – от другите три цвята (да означим това множество с N_*).

Нека разбием задачата на „непресичащи“ се подзадачи – да преброим отделно исканите конфигурации от 5 карти, в които няма пики, в които има 1 пика и в които има две пики.

- За да построим конфигурация, в която няма нито една пика, трябва да изберем три фигури от F_* – $\binom{9}{3}$ възможности, а останалите две карти от – N_* $\binom{30}{2}$ възможности. Двата избора са независими един от друг, значи общият брой възможности в този случай е $\binom{9}{3}.\binom{30}{2}$.
- Конфигурациите с точно една пика можем да разделим на две:
  = такива, в които пиката е фигура – $\binom{3}{1}$ възможности. Тогава трябва да изберем още две фигури от F_* – $\binom{9}{2}$ възможности и две карти от N_* – $\binom{30}{2}$ възможности. Общо – $\binom{3}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{2}$;
  = такива, в които пиката не е фигура – $\binom{10}{1}$ възможности. Тогава трябва да изберем три фигури от F_* – $\binom{9}{3}$ възможности и една карта от N_* – $\binom{30}{1}$ възможности. Общо – $\binom{10}{1}.\binom{9}{3}.\binom{30}{1}$;
  Или различните конфигурации с 1 пика са $\binom{3}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{2} + \binom{10}{1}.\binom{9}{3}.\binom{30}{1}$.
- Конфигурациите с точно две пики можем да разделим на три:
  = такива, в които двете пики са фигури – $\binom{3}{2}$ възможности. Тогава трябва да изберем още една фигура от F_* – $\binom{9}{1}$ възможности и две карти от N_* – $\binom{30}{2}$ възможности. Общо – $\binom{3}{2}.\binom{9}{1}.\binom{30}{2}$;
  = такива, в които двете пики не са фигури – $\binom{10}{2}$ възможности. Тогава трябва да изберем трите фигури от F_* – $\binom{9}{3}$ възможности. Общо – $\binom{10}{2}.\binom{9}{3}$;
  = такива, в които едната пика е фигура а едната не – $\binom{3}{1}\binom{10}{1}$ възможности. Тогава трябва да изберем още две фигури от F_* – $\binom{9}{2}$

възможности и една карта от $N_* - \binom{30}{1}$ възможности. Общо – $\binom{3}{1}.\binom{10}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{1}$.

Така, различните конфигурации с две пики са $\binom{3}{2}.\binom{9}{1}.\binom{30}{2} + \binom{10}{2}.\binom{9}{3} + \binom{3}{1}.\binom{10}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{1}$.

Така, търсеният брой конфигурации е: $\binom{9}{3}.\binom{30}{2} + \binom{3}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{2} + \binom{10}{1}.\binom{9}{3}.\binom{30}{1} + \binom{3}{2}.\binom{9}{1}.\binom{30}{2} + \binom{10}{2}.\binom{9}{3} + \binom{3}{1}.\binom{10}{1}.\binom{9}{2}.\binom{30}{1}$.